数理統計学まとめ（その 12）：第 6 章 検定

3.2 二つの母分散がわかっていない (未知の) 場合の平均の差の検定

一般的な方法はないが，二つの有力な方法がある．準備として次の定理を用意する．

定理 3.1 X が自由度 ν のカイ 2 乗分布に従い，Y が X と独立で自由度 μ のカイ 2 乗分布に従うとき，$X+Y$ は 自由度 $\nu+\mu$ のカイ 2 乗分布に従う．

証明 積率母関数について知られている事実を使おう．自由度 a のカイ 2 乗分布に従う確率変数 X の積率母関数は

$$E(e^{tX}) = \frac{1}{(1-2t)^{a/2}}$$

で与えられる．これは単なる変数変換でわかる．実際

$$\begin{aligned} E(e^{tX}) &= \frac{1}{2^{a/2}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty e^{tx}x^{a/2-1}e^{-x/2}ndx \\ &= \frac{1}{2^{a/2}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty e^{-(1-2t)x/2}x^{a/2-1}dx \end{aligned}$$

$y=(1-2t)x$ とおくと $t<1/2$ のとき右辺は

$$\frac{1}{(1-2t)^{a/2}}\frac{1}{2^{a/2}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty e^{-y/2}y^{a/2-1}dy$$

だが，ここで $t=0$ とすると，

$$1 = \frac{1}{2^{a/2}\Gamma(\frac{a}{2})}\int_0^\infty e^{-y/2}y^{a/2-1}dy$$

だから $E(e^{tX}) = 1/(1-2t)^{a/2}$ がわかる．

積率母関数がこの形の分布は自由度 a のカイ 2 乗分布しかない事が知られている．今，上の X,Y について $X+Y$ の積率母関数を見てみると，X と Y が独立なので，

$$E(e^{t(X+Y)}) = E(e^{tX}e^{tY}) = E(e^{tX})E(e^{tY}) = \frac{1}{(1-2t)^{\nu+\mu}}$$

となる．したがって $X+Y$ の分布は自由度 $\nu+\mu$ のカイ 2 乗分布になる．
$\square$

3.2.1　二つの母分散が同じと見てよいとき

二つの母集団がもっと大きな集団の部分集団であるときなど，平均は違っても分散はほぼ同じという場合は多くある．このときは二つの母集団からの無作為標本 $(X_1,\dots,X_n)$ と $(Y_1,\dots,Y_m)$ について

$$\begin{aligned}&nS_X^2+mS_Y^2\\&=\left\{(X_1-\bar{X})^2+\cdots+(X_n-\bar{X})^2\right\}+\left\{(Y_1-\bar{Y})^2+\cdots+(Y_m-\bar{Y})^2\right\}\end{aligned}$$

を考える。nS_X^2/σ^2 は自由度 $n-1$ のカイ 2 乗分布に従い mS_Y^2/σ^2 は自由度 $m-1$ のカイ 2 乗分布に従う．これらが独立なことより定理 3.1 を用いて

$$\chi=\frac{nS_X^2+mS_Y^2}{\sigma^2}$$

は自由度 $n+m-2$ のカイ 2 乗分布に従う．これは第 4 章定理 4.2 により，$\bar{X},\bar{Y}$ と独立であり、帰無仮説 $\mu_X=\mu_Y$ の下で

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{m}}}$$

は標準正規分布に従うので $T=Z/\sqrt{\chi/(n+m-2)}$ すなわち

$$T=\frac{\bar{X}-\bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{nS_X^2+mS_Y^2}{n+m-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{m}}}$$

が自由度 $n+m-2$ の T-分布に従う．これを使って検定ができる．

$$\begin{aligned}H_0&:\mu_X=\mu_Y\\H_1&:\mu_X\neq\mu_Y\end{aligned}$$

とし，有意水準 α を決めると，棄却域は

$$R=\{|t|>t_{n+m-2}(\alpha)\}$$

となる．

例 3.1 (教科書 p.126 例題 6.5)
ある動物を 2 群に分け，2 種類のエサ A,B を与えて成長の差を調べた．体重 (g) について下のデータを得た．A の方が良いと言えるか？

	平均	分散	サンプル数
A	168.1	8.8	10
B	164.3	10.1	8

二つの群れは分散が等しいとして平均の差の検定を行う.

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$
$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

として，有意水準 5 %とする．検定統計量は

$$T = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{10s_A^2 + 8s_B^2}{16}}\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{8}}}$$

棄却域は

$$R = \{|t| > t_{16}(0.05) = 2.120\}$$

となる．$10s_A^2 + 8s_B^2 = 88 + 10.1 \times 8 = 168.8$, $\bar{x}_A = 168.1$, $\bar{x}_B = 164.3$ を代入して T の実現値 t は

$$t = \frac{168.1 - 164.3}{\sqrt{10.55 \times \frac{9}{40}}} = 2.466$$

となり，この値は棄却域に入る．従って帰無仮説 $H_0 : \mu_A = \mu_B$ は棄却され，A の方が有意に良いと言える.

3.2.2 サンプル数大の場合

二つの母集団 A, B からとったサンプルの数 n_A, n_B が大きいときは，母分散が等しいと思えないときでもそれぞれの母分散 σ_A^2, σ_B^2 をそれぞれ $\frac{n_A}{n_A-1}S_A^2$, $\frac{n_B}{n_B-1}S_B^2$ で近似することができる．このとき

$$Z = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A - 1} + \frac{S_B^2}{n_B - 1}}}$$

は帰無仮説 $\mu_X = \mu_Y$ の下で近似的に標準正規分布に従うことを利用する．(経験的に $n_A, n_B > 30$ でもよいとされている)

例 3.2 （教科書 p.128, 例題 6.6）

二種類のタイヤ A, B について耐久力テストの結果は表のとおりであった．耐久力の差は有意か？有意水準 1 %で検定せよ．

	平均	標準偏差	n
A	60.5	8.2	50
B	55.2	7.7	70

解

$$H_0 : \mu_A = \mu_B$$
$$H_1 : \mu_A \neq \mu_B$$

サンプル数大として正規分布で両側検定を行う．

$$Z = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\frac{S_A^2}{n_A - 1} + \frac{S_B^2}{n_B - 1}}}$$

が帰無仮説 $H_0 : \mu_A = \mu_B$ の下で標準正規分布に従うと近似的にしてよいので，棄却域

$$R = \{|z| > z_{0.01} = 2.575\}$$

として検定する[1]．さて，Z の実現値は $\bar{x}_A = 60.5$, $\bar{x}_B = 55.2$, $s_A = 8.2$, $s_B = 7.7$, $n_A = 50$, $n_B = 70$ を使って

$$z = \frac{60.5 - 55.2}{\sqrt{\frac{8.2^2}{49} + \frac{7.7^2}{69}}} = 3.548$$

この値は棄却域に入るので，帰無仮説 $H_0 : \mu_A = \mu_B$ は棄却され，この 2 種類のタイヤでは耐久性に有意の差があると言える．タイヤ A の方がタイヤ B よりも耐久性に優れているようだ．

[1]教科書では $z_{0.01} = 2.576$ となっている．これはもっと詳しい数値を利用したものと思われる．表からは 2.576 は読み取りにくい