第 3 章　　積分法

3.1　定積分と不定積分

区間 $[a,b]$ 上定義された関数 $f(x)$ に対し，その **定積分** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f\left(a+\frac{(b-a)k}{n}\right)$$

として高校では説明された．さらにこれは

直線 $x=a, x=b$ の間で $y=f(x)$ のグラフが x 軸 ($\{\ y=0\ \}$) とで囲む**符合つき面積**

として直感的に理解できる。(教科書 p.77 の図参照)
積分に現れる変数 x はダミー変数である[1]。

注意 3.1 定積分はどんな関数に対してもあるという訳ではない。定積分があるとき $f(x)$ は $[a,b]$ 上**リーマン積分可能** という。

詳しい事はあとでもう一度厳密な議論を紹介するが、$f(x)$ が $[a,b]$ 上リーマン積分可能なときには $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ は次のような極限となる[2]。

$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$ と、区間 $[a,b]$ の中に n 個の点をとる、この点列 $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ を $[a,b]$ の**分割** と呼び、それぞれの x_i をその**分点**と呼ぶ。分割は $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ と書く事もある。

分割 $\Delta=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b\}$ に対して、それぞれの小さな区間 $[x_i,x_{i+1}]$ から任意に点 ξ_i を選んでくる。この分割の最大幅：

$$|\Delta|=\max\{|x_{i+1}-x_i|\,;\,0\le i\le n-1\}$$

[1]積分をしてしまうと変数としては残らない。したがって x を使おうが y を使おうが t を使おうが全く構わない

[2]この事実はすでに知っているとも言えるが、こう表現しておく事が役に立つ時が時々あるので覚えておくとよい。

が 0 に近づくように $n \to \infty$ として分点 $\{x_i\}$ を増やして行く時、極限で

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

がなりたつ。(教科書 p.79 の図を参照)

以下、関数 $f(x)$ は考えている区間またはそれを含む区間でリーマン積分可能とする。いちいちそのことは断らない事にする。

定理 3.1 $a > b$ のとき $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$, および $\int_a^a f(x)dx = 0$ と約束する事にすると、任意の a, b, c に対して

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

が成り立つ。(定積分の加法性)

$a < c < b$ のときが普通で、これは定積分の定義から出てくるが、後でもう一度厳密に議論する事になる。

定積分の上端を変数 x で置き換えた関数

$$F(x) = \int_a^x f(u)du$$

を $f(x)$ の**不定積分**という。

定理 3.2 関数 $f(x)$ が c を含む開区間 I で連続ならば

$$\frac{d}{dx}\int_c^x f(u)du = f(x) \qquad (x \in I)$$

証明 $f(x)$ が定数 K のとき．$F(x) = K(x - c)$ だから

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{Kh}{h} = K = f(x)$$

となり，$h \to 0$ としてもこの値は定数 $K = f(x)$ だから上の式は正しい．

一般の連続な関数 $f(x)$ について似たように考える．$c \le x \le x+h$ がすべて I の点として，f が x で連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が，$|x - u| < \delta$ となるとき常に

$$|f(u) - f(x)| < \varepsilon$$

となるように選ぶことができる． 書き直してこのとき

$$f(x) - \varepsilon < f(u) < f(x) + \varepsilon.$$

両辺を u について $[x, x+h]$ で積分して $|h| < \delta$ のとき

$$(f(x) - \varepsilon)h < \int_x^{x+h} f(u)du = F(x+h) - F(x) < (f(x) + \varepsilon)h.$$

$$\therefore \quad f(x) - \varepsilon < \frac{F(x+h) - F(x)}{h} < f(x) + \varepsilon$$

ゆえに，**任意の** $\varepsilon > 0$ **に対して** $\delta > 0$ **が存在して** $|h| \leq \delta$ **ならば**

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| < \varepsilon$$

なので，$F(x)$ は x で微分可能で $F'(x) = f(x)$. □

定義 3.1 与えられた関数 $f(x)$ に対して、関数 $F(x)$ が **原始関数** であるとは $F'(x) = f(x)$ となることをいう。

定理 3.3 関数 $f(x)$ の二つの原始関数は定数しか違いが無い。

証明 $F(x), G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、$F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ となる。平均値の定理により、このとき

$$F(x) - G(x) = F(a) - G(a) + (F'(c) - G'(c))(x - a) = F(a) - G(a).$$

(c は a と x の間に見つかる) □

定理 3.4 （微分積分学の基本定理）$f(x)$ が連続で、$F(x)$ がその原始関数（の一つ）ならば

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

証明 $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du$ は定理 3.2 より $f(x)$ の原始関数になっていて、したがって上の事から

$$F(x) = G(x) + C = \int_a^x f(u)du + C$$

となる定数 C がとれる。これで $F(b) - F(a)$ を考えればよい。 □

定理 3.5 （定積分の基本性質：線形性）

1) $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$ （復号同順）

2) $\displaystyle\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$ （c は定数）

証明は (1) から分かる。線形性は不定積分についても成立する。

定理 3.6 （不定積分の基本性質：線形性）

1) $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$ （復号同順）

2) $\displaystyle\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$ （c は定数）

定理 3.7 （定積分の基本性質：不等式）$a < b$ とする。

1) $f(x) \geq 0$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

2) $f(x) \geq g(x)$ のとき $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

3) $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$

4) $m \leq f(x) \leq M \ (a \leq x \leq b)$ のとき

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

証明は面積の比較と思うと理解しやすい。実際に証明する時は (1) を使うと証明がやりやすい。

定理 3.8 （シュワルツの不等式）$a < b$ とする。

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2dx}\sqrt{\int_a^b g(x)^2dx}$$

証明　$f(x) \equiv 0$ のときは明らか．そうでないとする．実数 c に対して

$$\int_a^b (f(x)+cg(x))^2dx = \int_a^b f(x)^2dx + 2c\int_a^b f(x)g(x)dx + c^2\int_a^b g(x)^2dx$$

と展開して、この式は常に非負だから、 c に関する 2 次式としての判別式は 0 以下になる。これから求める式が出る。 □