

5.7 その他重積分に関する補足

5.7.1 ジョルダン外測度と可測集合

定義 5.1 平面の有界集合 A がジョルダンの意味で可測とは

$$1_A(x, y) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in A \text{ のとき} \\ 0 & (x, y) \notin A \text{ のとき} \end{cases}$$

という関数 (A の指示関数) が積分可能な時に言う. このとき A のジョルダン測度 $|A|$ を

$$|A| = \int_A dx dy = \int_R 1_A(x, y) dx dy \quad (R \text{ は } A \text{ を含む長方形})$$

と定める. この値は A を含む長方形 R によらずに決まる.

A が有界でないとき, A がジョルダンの意味で可測とは任意の $n > 0$ に対して $A \cap \{x^2 + y^2 \leq n^2\}$ がジョルダンの意味で可測なときに言う.

ダルブーの定理により有界な A に対して

$$\bar{S}(1_A) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \bar{S}_\Delta(1_A)$$

が存在することは知られている. この値 $\bar{S}(1_A)$ を A のジョルダン外測度と呼ぶ. ジョルダン外測度が 0 の集合は積分に影響を与えない. 従ってヤコビアンが 0 になる集合のジョルダン外測度が 0 ならば変数変換の公式がそのまま成り立つ (教科書定理 5.16).

ジョルダン可測集合の定義はそのまま多次元にも拡張できる. 変数変換の定理 (教科書定理 5.16) もそのまま成り立つ. 以下, ジョルダン可測集合のことを単に可測集合と言う.

5.7.2 広義積分

無限領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の積分は広義積分として考えるが, 無限に広げる広げかたがいろいろやり方があるため, 広義積分が定義できるための条件が厳しくなっている.

定義 5.2 (教科書定義 5.5)

平面内の可測集合 D に対して D に含まれる有界な可測集合の列 $\{A_n\}$ が D の可測な取り尽くし列であるとは次の条件 (A),(B) を満たすことを言う.

- (A) $A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1$
- (B) 任意の有界な可測集合 $K \subset D$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |K \cap A_n| = |K|.$$

D 上無限大になる関数や D が無限領域の時の関数の積分は広義積分になる.

定理 5.3 (教科書命題 5.3)

$\{A_n\}, \{B_n\}$ を D の可測な取りつくし列とする. $f \geq 0$ が各 $n \geq 1$ に対して A_n および B_n 上で積分可能とする. この時,

$$\sup_n \int_{A_n} f(x, y) dx dy < \infty \iff \sup_n \int_{B_n} f(x, y) dx dy < \infty$$

である. さらに, 上の条件が成り立つとき

$$\sup_n \int_{A_n} f(x, y) dx dy = \sup_n \int_{B_n} f(x, y) dx dy.$$

この定理により次の定義が可能になる.

定義 5.3 (教科書定義 5.6)

可測集合 D 上 $f \geq 0$ となるとき, ある D の可測な取りつくし列 $\{A_n\}$ がとれて, f は各 A_n 上積分可能で, さらに

$$\sup_{n \geq 1} \int_{A_n} f(x, y) dx dy < \infty$$

となるときに f は D 上広義積分可能と言う. このとき

$$\int_D f(x, y) dx dy = \sup_{n \geq 1} \int_{A_n} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} f(x, y) dx dy$$

と定める.

一般の f に対しては

$$f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}, \quad f^-(x, y) = \min\{-f(x, y), 0\}$$

とおくと $f = f^+ - f^-$ だから, f^+, f^- がともに D 上で広義積分可能であるときに f は D 上広義積分可能であるといい,

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_D f^+(x, y) dx dy - \int_D f^-(x, y) dx dy$$

と定める.

例 5.9 (教科書例題 5.16) 次の広義積分を計算せよ.

(1) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ に対して

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy$$

(2) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x^2 + y^2 \leq x\}$ に対して

$$\int_E \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

解答 (1) 分母は単位円周上で 0 になるので, 可測な取りつくしの列として $D_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ をとる. 平面の極座標変換により

$$\begin{aligned} \int_{D_n} \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_{\{0 \leq r \leq \sqrt{1-\frac{1}{n}}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}} \frac{r dr d\theta}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= 2\pi \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\ &= 2\pi \left(1 - \sqrt{\frac{1}{n}} \right) \\ &\rightarrow 2\pi \end{aligned}$$

この積分値は n とともに単調増加するので, 極限が上限と一致. よって

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = 2\pi$$

(2) $E_n = \{\frac{1}{n} \leq x^2 + y^2 \leq n\}$ とおく．あきらかに $E_n \uparrow E$ だからこれは可測な取りつくし列になっている．このとき (1) と同様に

$$\begin{aligned} \int_{E_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \int_{\{-\pi \leq \theta \leq \pi, \sqrt{\frac{1}{n}} \leq r \leq \sqrt{n}\}} \frac{rdrd\theta}{r} \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) d\theta \\ &\rightarrow \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \\ &= 2 \end{aligned}$$

練習 5.5 $\alpha > 1$ のとき $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}$ は $D = \{x^2 + y^2 \geq 1\}$ で広義積分可能であることを示し，

$$\int_D (x^2 + y^2)^{-\alpha} dxdy$$

の値を求めよ．