微分積分学 2 演習 (07/10/2014)　解答例

練習 3.1 (教科書 p.82 問 3.3, 3.4) 連続関数 $f(x)$ に対して次の式が成り立つ事を確かめよ。

(1) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_x^c f(u)du = -f(x)$

(2) $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_c^{x^2} f(u)du = 2xf(x^2)$

解答　(1) 微分積分学の基本定理により，$f(x)$ には原始関数 $F(x)$ があり，

$$\int_x^c f(u)du = F(c) - F(x).$$

これを x について微分すれば

$$\frac{d}{dx}\int_x^c f(u)du = -F'(x) = -f(x).$$

(2) $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると

$$\int_c^{x^2} f(u)du = F(x^2) - F(c)$$

これを x で微分して，合成関数の微分の公式を使うと，

$$\frac{d}{dx}\int_c^{x^2} f(u)du = F'(x^2)2x = 2xf(x^2).$$

練習 3.2 シュワルツの不等式を用いて，$f(x), f(x)^2$ が $[a,b]$ でリーマン積分可能なとき

$$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f(x)^2 dx$$

を証明せよ.

解答　$g(x) \equiv 1$ としてシュワルツの不等式をつかうと

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot 1dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b dx \int_a^b f(x)^2\, dx}$$

だから両辺を 2 乗すれば結論を得る.

講評　できは良かったです．間違った人は，多くが教科書やプリンとの定理の証明と同じようにきちんと証明しようという意欲的なものでした．大歓迎です．残念ながら，この試みは多くの人が詰めが甘く，正解にはたどり着いていませんでしたが，その意気はなかなか頼もしいと思います.