微分積分学 2 演習 (21/10/2014) 解答例

練習 3.6 次の不定積分を計算せよ.

$$(1) \int x \sin 2x \, dx \quad (2) \int x^3 \log x \, dx \quad (3) \int x \mathrm{Arctan} x \, dx \quad (4) \int x \cos^2 x \sin x \, dx$$

解答

(1)

$$\begin{aligned}\int x \sin 2x \, dx &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx \\ &= -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\int x^3 \log x \, dx &= \frac{x^4}{4}\log x - \frac{1}{4}\int x^3 dx \\ &= \frac{x^4}{4}\left(\log x - \frac{1}{4}\right) + C\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\int x \mathrm{Arctan} x dx &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan} x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)} dx \\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2}\mathrm{Arctan} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{Arctan} x + C\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\int x \cos^2 x \sin x dx &= -\frac{x}{3}\cos^3 x + \frac{1}{3}\int \cos^3 x dx \\ &= -\frac{x}{3}\cos^3 x + \frac{1}{3}\int (1 - \sin^2 x)\cos x dx \\ &= -\frac{x}{3}\cos^3 x + \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{9}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

3 倍角の公式を使うと答は

$$\int x \cos^2 x \sin x dx = -\frac{x}{12}\cos 3x - \frac{x}{4}\cos x + \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{36}\sin 3x + C$$

とも書くことができる.

練習 3.7 (1) 定積分

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$$

を計算せよ．

(2) $n \geq 1$ に対して，定積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

を計算せよ

解答

(1)

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C\end{aligned}$$

だから

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx = -e^{-1} - 2e^{-1} - 2e^{-1} + 2 = 2 - 5e^{-1}$$

(2)

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^n} = J_n$$

と書く．部分積分により

$$\begin{aligned}J_n &= \left[\frac{x}{(x^2+1)^n}\right]_0^1 + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx \\ &= \frac{1}{2^n} + 2n\,(J_n - J_{n+1})\end{aligned}$$

これより

$$J_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}n} + \frac{2n-1}{2n} J_n$$

つまり，$n \geq 2$ のとき

$$J_n = \frac{1}{2^n(n-1)} + \frac{2n-3}{2(n-1)} J_{n-1}$$

となる．

$$J_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

である．この漸化式を解くと $n \geq 2$ のとき

$$J_n = \frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n-2} \frac{(n-j-2)!(2n-3)!!}{(n-1)!(2(n-j)-3)!!} + \frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\pi}{4}$$

となる．この式は $n=1$ のときは $(-1)!!\frac{\pi}{4}$ となるので，意味がない．したがって答は $n=1$ の場合と $n \geq 2$ の場合と別々に書くことになる．念のためだが， $(2k-3)!! = (2k-3)(2k-5)\cdots 3\cdot 1$ である．

講評　部分積分のやり方が身についていない人が多かったです．これは驚き．
また，

$$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$$

の計算に戸惑った人が多かったことと，$\cos^3 x$ の積分を上のように変形せず 3 倍角の公式を使って間違えた人が目立ちました．まあ、部分積分は難しいということではありますが，練習しておいてください．