

練習 5.1 次の累次積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y) \, dy \right) dx$$

解答 (1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy dx &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y) \, dy \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin z \, dz dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos z]_x^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1 \end{aligned}$$

講評 みんなよくできていました。間違った人はほとんどが計算間違いです。

$$\int x^2(1-x^2)dx$$

を三角関数に変数変換した人がいましたが、 $x^2(1-x^2) = x^2 - x^4$ なのですから、やさしい積分を難しくしていますね。また、加法定理で三角関数をバラバラにしてから計算した人が数人いましたが、こうしてもあまり簡単にはなりませんね。変数変換をする法がやさしそうだと思うと予想していたのですが。

累次積分は重積分の基本ですから、これができていることは心強いですね。