2　行列

行列 同じ次元の横ベクトルを縦に並べたもの:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{pmatrix}$$

の様に成分で書く。上の例は 4 次元の横ベクトルを縦に 3 個並べたもの。これは 3 次元の縦ベクトルを横に 4 個並べたものとも見ることができる。行列の横ベクトルを**行ベクトル**、縦ベクトルを**列ベクトル**と呼ぶ。

一般には

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

の様に書き、m 行 n 列の行列（または $m\times n$ 行列）と呼ぶ。$m=n$ のとき行列は正方行列という。

ベクトルは行列である。m 次元縦ベクトルは $m\times 1$ 行列であり、n 次元横ベクトルは $1\times n$ 行列である。

2.1　行列の和と積、スカラー倍

行列の和、差、スカラー倍

ベクトルと同じように成分毎に行う。従って、おなじ行数と列数を持つとき和と差が定義できる。

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

のように計算する。スカラー倍はすべての成分を同じスカラー倍する。

$$rA=\begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & \cdots & ra_{1n} \\ ra_{21} & ra_{22} & \cdots & ra_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ ra_{m1} & ra_{m2} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}$$

と計算する。

行列の積　$m\times n$ 行列 A と $n\times k$ 行列 B に対して、積 AB を $m\times k$ 行列として次のように定義する。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nk} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{1j}b_{jk} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{j1} & \cdots & \sum_{j=1}^n a_{mj}b_{jk} \end{pmatrix}$$

つまり、行列 AB の (i,j)-成分 $(AB)_{ij}$ は

$$(AB)_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\ldots+A_{in}B_{nj}$$

と計算する。

例 2.1

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 2+5\cdot 3 & 1\cdot 4+3\cdot 5+5\cdot 6 \\ 2\cdot 1+4\cdot 2+6\cdot 3 & 2\cdot 4+4\cdot 5+6\cdot 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 22 & 49 \\ 28 & 64 \end{pmatrix}$$

積の公式（教科書 p.39）A,B : $m\times\ell$ 行列、$C:\ell\times n$ 行列、$D:k\times m$ 行列とするとき、積 AC,BC,DA,DB と $D(AC),D(BC),(DA)C,(DB)C$ が定義できて, すべて $k\times n$ 行列となり、次の公式が成り立つ。

[6] $(A+B)C=AC+BC$
[7] $D(A+B)=DA+DB$
[8] $D(AC)=(DA)C$
[9] $r(AC)=(rA)C$　　r は実数。

注意 2.1 AC が定義できても CA が定義できるかどうかは分からない。定義できるには $m=n$ が必要。また、CA が定義できたとしても AC と CA が等しいとは限らない。例えば、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、

$$AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、確かに $AC \neq CA$ となる。

行列の積はかける順番が大事！

2.2 行列とベクトルの積：１次変換

n 次元ベクトルを行列と見れば、縦ベクトルと行列の積、横ベクトルと行列の積も行列の積の定義に従って計算できる

例 2.2

$$(1,2,3)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2,5), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

横ベクトルに右から行列をかけると（積が定義されていれば）横ベクトルができる。

縦ベクトルに左から行列をかけると（積が定義されていれば）縦ベクトルができる。

特に、n 次元横ベクトルに右から $n \times n$ 行列をかけるとまた n 次元横ベクトルが得られる。

同様に、n 次元縦ベクトルに左から $n \times n$ 行列をかけるとまた n 次元縦ベクトルが得られる。

行列の積の性質から、$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を n 次元横ベクトルとすると $n \times \ell$ 行列 A によって新しい ℓ 次元横ベクトル $\boldsymbol{x}A$, $\boldsymbol{y}A$ が得られ、

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})A = \boldsymbol{x}A + \boldsymbol{y}A$$

が成り立つ。（ベクトルの和が A によって写された先は、それぞれのベクトルの写った先の和になる）縦ベクトルに付いても同じ。

１次変換

$\boldsymbol{x}$ を n 次元縦ベクトルとして、A を $m \times n$ 行列とするとき、$\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ で m 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ を定義すると、これを成分で書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots &= \vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

A は $\boldsymbol{x}$ を $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ に写す１次変換の行列という。

練習 2.1 (教科書 p.43 問題 2-3)

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

   のとき、$A - B, A + B, AB, BA, ABC$ を求めよ。

2. 正方行列 A の n 個の積を A^n と書く。

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n-1}n \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

   を証明せよ。

3. $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ に対し、A^n を計算せよ。