3　単位行列、行列の転置 (行列)

> 次回から教室が C506 に変更になります。

3.1　行列の積の復習

行列の積について復習してみる。A が $m \times n$ 行列、B が $k \times \ell$ 行列ならば、$n = k$ のときに積 AB が定義できる。AB の (i, j) 成分 $(AB)_{ij}$ は

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \ldots + A_{in}B_{nj}$$

と計算する。A の第 i 行ベクトルと B の第 j 列ベクトルの転置に対して内積をとっている。例えば

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-2 & 1+1 \\ 0+6 & 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

とくに A が n 次元横ベクトル $\boldsymbol{a}$ で、 B が n 次元縦ベクトル $\boldsymbol{b}$ ならば、AB=$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}^T$ である。

このことを表わすため、行列を「行ベクトルを縦に並べたもの」や、「列ベクトルを横に並べたもの」と見る方法がある。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \quad \text{のとき}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}), \quad \boldsymbol{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$$

および

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{pmatrix}$$

とかくと、

$$AB = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1^T & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_2^T & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_3^T \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_1^T & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_2^T & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{b}_3^T \end{pmatrix}$$

となる。

3.2　単位行列

$n \times n$ 行列（行の数と列の数が同じ行列）を n 次**正方行列**という。その中でも特別な行列として**単位行列** E_n がある。

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

縦横のサイズはそれぞれ n である。成分で見ると

$$(E_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \text{ のとき：対角 (diagonal) 成分} \\ 0 & i \neq j \text{ のとき：非対角 (off-diagonal) 成分} \end{cases}$$

となっている。$m \times n$ 行列 A に対しては

$$E_m A = A E_n = A$$

が成り立っている。（実数のときの 1 の役割）

練習 3.1 3 次元の単位行列は $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。実際に $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ に対して $AE_3 = E_3 A = A$ を確かめてみよう。

3.3　行列の転置 (行列)

行列 A の行と列を入れ換えたものもまた行列になる。これを A^T とかき、A の**転置行列** という。縦横を入れ換えるので、ベクトルのときの記号と同じである。

成分で見ると A^T の (i, j) 成分 $(A^T)_{ij}$ は、もとの行列の i と j を入れ換えた (j, i) 成分 A_{ji} になる。

$m \times n$ 行列 A の転置行列 A^T は $n \times m$ 行列になる。

例 3.1　1. $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ のとき、

$$\boldsymbol{a}^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

したがって、$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ のとき、

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ のとき、$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

転置行列の性質

1. $(A^T)^T = A$
2. $m \times n$ 行列 A と $n \times \ell$ 行列 B に対して、$(AB)^T = B^T A^T$
   これは形式的に計算する方が分かりやすい。

$$\begin{aligned} ((AB)^T)_{ij} &= (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}B_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (A^T)_{kj}(B^T)_{ik} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik}(A^T)_{kj} = (B^T A^T)_{ij} \end{aligned}$$

   と計算すると成分毎の等式が分かる。

練習 3.2 (第 2 章演習問題から)

[1] $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ とするとき、次の行列を求めよ。

$$A + B, AB, A^2, A^T B^T$$

[3] 次の計算をせよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

[8]

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とするとき、P^2, P^3, P^4 を求めよ。