6　行列式の計算

行列式の計算には行列式の性質をフルに利用して、できるだけ簡単な計算になるようにする。いくつかの典型的な計算例を紹介しよう。

例 6.1　（教科書 p.64 例題 3.6）

1. $$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

   これは左辺を第 1 行で展開すると

   $$\text{左辺} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

   となり、帰納法が使える。

2. $$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n(n-1)/2}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}.$$

   これも帰納法が使える。左辺を第 1 列で展開すると

   $$\text{左辺} = (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\ 0 & a_{n-2,3} & \dots & a_{n-2,n} \\ a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

   となり、$n-1$ のとき結論が正しいと仮定すると、

   $$\text{上式右辺} = (-1)^{n+1+(n-1)(n-2)/2}a_{n1}a_{n-1,2}\cdots a_{1n}$$

   となるが、

   $$(-1)^{n+1+(n-1)(n-2)/2} = (-1)^{n(n-1)/2+2} = (-1)^{n(n-1)/2}$$

   となり n のときも正しい。$n = 2$ のとき正しい事は直接確かめればよい。

例 6.2 (Vandermonde の行列式：教科書 p.80 第 3 章演習問題 [2](1))

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (\text{第 }2,3\text{ 列からそれぞれ第 1 列を引く}) \\
&\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 列で展開}) \\
= &\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix} \\
= &\ (a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

例 6.3 （巡回行列式：教科書 p.80 第 3 章演習問題 [2](2) ）

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad (\text{ 第 1 行} + \text{第 2 行} + \text{第 3 行 }) \\
= &\ (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad (\text{ 第 2 列} - \text{第 1 列、第 3 列} - \text{第 1 列}) \\
= &\ (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a-c & b-c \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\{(a-b)(a-c)+(b-c)^2\} \\
= &\ (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)
\end{aligned}$$

例 6.4

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & -b & -a & b \\ b & a & -b & -a \\ c & -d & c & -d \\ d & c & d & c \end{vmatrix} \quad (\text{第 3 列} + \text{第 1 列、第 4 列} + \text{第 2 列}) \\
= &\begin{vmatrix} a & -b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ c & -d & 2c & -2d \\ d & c & 2d & 2c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2c & -2d \\ 2d & 2c \end{vmatrix} \\
= &\ 4(a^2+b^2)(c^2+d^2)
\end{aligned}$$

例 6.5 $\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix}$ を計算する。

$a_{12} = a_{13} = a_{14} = 0$ のときは第 1 行がすべて 0 なので行列式の値も 0 になる。したがってこれらのどれかが 0 でない場合を考える。どの場合も同じように計算すればいいので、$a_{12} \neq 0$ のときを考える。このときは、第 3 行に第 1 行 $\times \frac{a_{23}}{a_{12}}$ を加え、第 4 行に第 1 行 $\times \frac{a_{24}}{a_{12}}$ を加えると

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 \end{vmatrix} \\
=& \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} \\ -a_{13} & 0 & \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{13} & a_{34} + \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{14} \\ -a_{14} & 0 & -a_{34} + \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{13} & \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{14} \end{vmatrix} \quad \text{第 2 列で展開} \\
=& a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{13} & a_{34} + \frac{a_{23}}{a_{12}}a_{14} \\ a_{14} & -a_{34} + \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{13} & \frac{a_{24}}{a_{12}}a_{14} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{第 2 行と第 3 行を} \\ a_{12}^{-1} \text{ でくくり、前へ出す} \end{array} \\
=& a_{12}^{-1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{23} & a_{24} \\ a_{12}a_{13} & a_{23}a_{13} & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} \\ a_{12}a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} & a_{24}a_{14} \end{vmatrix} \quad a_{12}^{-1} \text{ を 第 1 列にかける} \\
=& \begin{vmatrix} 1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23}a_{13} & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} \\ a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} & a_{24}a_{14} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{第 2 列} - \text{第 1 列} \times a_{23} \text{ と} \\ \text{第 3 列} - \text{第 1 列} \times a_{24} \end{array} \\
=& \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & a_{12}a_{34} + a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24} \\ a_{14} & -a_{12}a_{34} + a_{24}a_{13} - a_{14}a_{23} & 0 \end{vmatrix} \\
=& (a_{12}a_{34} + a_{14}a_{23} - a_{13}a_{24})^2
\end{aligned}$$

練習 6.1 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & b+c & c+a \\ ab & bc & ca \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$

練習 6.2 次の行列式を計算せよ。

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$