7　逆行列

方程式 $ax=b$ は $a\neq 0$ のとき解けて、解は $x=a^{-1}b=b/a$ と書ける。a^{-1} は a の逆数であるから、 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$ である。

連立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y &= c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y &= c_2 \end{cases}$$

は行列 A とベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{c}$ を

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{c}=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

と書くとき、

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c} \tag{8}$$

と表せる。もし、

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるような 2×2 行列 A^{-1} が見つかったら (8) の左から A^{-1} をかけると、

$$A^{-1}(A\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{c}$$

で、

$$\text{左辺}=(A^{-1}A)\boldsymbol{x}=E_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

なので、$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{c}$ となって解が求まる事になる。以下ではこの様な行列 A^{-1} を求める事を考える。

正方行列の行列式の展開

$n\times n$ 行列 A を

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

とかくとき、A の行列式 $|A|$ を第 i 行で展開した式をみると

$$|A|=a_{i1}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}|+a_{i2}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}|+\ldots+a_{in}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}|$$

ここで、右辺の a_{ij} の代わりに c_j を使った式を考えてみると、

$$c_1(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}|+c_2(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}|+\ldots+c_n(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}|$$

となるが、これは、A の第 i 行のベクトルを $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\ldots,c_n)$ で取り換えた行列

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{c} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}$$

の行列式になっている。$i\neq 1$ のとき、$\boldsymbol{c}$ として A の第 1 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n})$ で置き換えると、第 1 行と第 i 行が同じベクトルになり、その行列式は性質 5（で列を行に変えたもの）により 0 になる。まとめてみると、

$$\begin{aligned} & a_{11}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}|+a_{12}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}|+\ldots+a_{1n}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}| \\ = & \begin{cases} |A| & i=1 \text{ のとき} \\ 0 & i\neq 1 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。上では $\boldsymbol{c}$ として第 1 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1=(a_{11},\ldots,a_{1n})$ をとったが、一般に第 j 行の行ベクトル $\boldsymbol{a}_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})$ をとっても同じように、

$$\begin{aligned} & a_{j1}(-1)^{i+1}|\overline{A_{i1}}|+a_{j2}(-1)^{i+2}|\overline{A_{i2}}|+\ldots+a_{jn}(-1)^{i+n}|\overline{A_{in}}| \\ = & \begin{cases} |A| & i=j \text{ のとき} \\ 0 & i\neq j \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \tag{9}$$

が分かる。この式を行列で表す事ができる。そのために**余因子**を並べた行列

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} |\overline{A_{11}}| & -|\overline{A_{12}}| & \dots & (-1)^{n+1}|\overline{A_{1n}}| \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (-1)^{n+1}|\overline{A_{n1}}| & (-1)^{n+2}|\overline{A_{n2}}| & \dots & |\overline{A_{nn}}| \end{pmatrix}$$

を考える。$\tilde{A}$ は A の**余因子行列**とも呼ばれる。これを使うと (9) は

$$A\tilde{A}^T=|A|E_n$$

とまとめる事ができる。A を列で展開した式で同じ事をやると

$$\tilde{A}^T A = |A|E_n$$

が出てくる。上の二つの式は、

> $|A| \neq 0$（このとき A は**正則**という） ならば
>
> $$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}$$

である事を言っている。A^{-1} を A の **逆行列** という。

例 7.1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列を求める。

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 4 = -16 \neq 0$$

なので A は正則で、余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -6 \\ -1 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、逆行列 A^{-1} は

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -6 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

上の例で見たように、逆行列のこの公式は計算量が多く使い勝手は悪い。

逆行列の性質

n 次の正方行列 A に対して、 $A^2 = AA$ はまた n 次の正方行列になるしたがって $A^3 = A^2A = AA^2$ が考えられる。同じようにして自然数 k に対して A^k も n 次の正方行列となり、指数法則

$$A^{k+\ell} = A^k A^\ell \quad k, \ell \geq 0 \text{ は整数}$$

が成り立っている。ただし、 $A^0 = E_n$ と理解する。A が正則のとき A^{-1} があるが、これも n 次の正方行列である。したがって $A^{-k} = (A^{-1})^k$ が考えられるがこれは A^k の逆行列になっている。実際、

$$A^{-k}A^k = \overbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}^{k}\overbrace{A\cdots A}^{k} = \overbrace{A^{-1}\cdots A^{-1}}^{k-1} E_n \overbrace{A\cdots A}^{k-1}$$

なので、$A^{-1}E_n = A^{-1}$ だから帰納的に $A^{-k}A^k = E_n$ が言える。$A^kA^{-k} = E_n$ も同じように確かめられる。このことを用いると、上の指数法則は k, ℓ が任意の整数でも成り立っている事が分かる。

一般に A, B を n 次の正方行列とすると、

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

が成り立つ。これを確かめよう。それには $C = B^{-1}A^{-1}$ とおくとき、

$$C(AB) = (AB)C = E_n$$

を示せばよい。実際、

$$\begin{aligned} C(AB) &= B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}E_nB = B^{-1}B = E_n, \\ (AB)C &= ABB^{-1}A^{-1} = AE_nA^{=1} = AA^{-1} = E_n \end{aligned}$$

なので、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ が示せた。

また、$(A^{-1})^{-1} = A$ である。これは逆行列の定義から明らか。

練習 7.1 （教科書 p.90 問題 4-1,2）次の 3×3 行列の逆行列を求めよ。

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$