8　連立一次方程式

未知数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に関する方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \quad \vdots &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n &= c_n \end{cases}$$

を解く事を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

と書くと上の方程式は $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c}$ と書けるので、$|A| \neq 0$ のとき逆行列 A^{-1} を使って $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{c}$ となる。

8.1　クラメルの公式

余因子行列 $\tilde{A}$ ($\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j}|\overline{A_{ij}}|$) を使うと逆行列の公式から $\boldsymbol{x} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}^T\boldsymbol{c}$ だったので、

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T)_{11}c_1 + \ldots + \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T)_{1n}c_n \\ &= \frac{1}{|A|}\left(|\overline{A_{11}}|c_1 + \ldots + (-1)^{1+n}|\overline{A_{n1}}|c_n\right) \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

同じようにして、$i = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T)_{i1}c_1 + \ldots + \frac{1}{|A|}(\tilde{A}^T)_{in}c_n \\ &= \frac{1}{|A|}\left((-1)^{i+1}|\overline{A_{1i}}|c_1 + \ldots + (-1)^{i+n}|\overline{A_{ni}}|c_n\right) \\ &= \frac{1}{|A|}\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & c_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & c_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \ldots & c_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

となる。この公式を**クラメルの公式**という

8.2　基本変形による方法

クラメルの公式はきれいな形ではあるが、実際の計算には向かない。計算量が多くなりすぎるという欠点がある。そこで、実際にはどのように計算するかを例によって示そう。(教科書 p.104-105 の例も参照)

連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \end{cases}$$

を考える。これを行列を使って

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とかき、これを普通の連立一次方程式を解く方法で変形する。まず、第 2 行を -2 倍したものを第 1 行に加え、第 2 行を -3 倍したものを第 3 行に加えると

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

第 1 行と第 2 行を入れ換えておく。すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

となる。次に第 2 行に $-1/3$ をかけて、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

第 2 行を 4 倍したものを第 3 行に加えると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 14/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

第 3 行を 3/14 倍して

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

これで $x_3 = -6/7$ がわかったので、これを第 2 行に代入して x_2 を求め、さらにこれらを第 1 行に代入して x_1 を求める事ができるが、もう少し変形を続けよう。

第 3 行を 4/3 倍して第 2 行に加え、第 3 行を 3 倍して第 1 行に加えると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11/7 \\ -8/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

最後に第 2 行を -2 倍して第 1 行に加えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/7 \\ -8/7 \\ -6/7 \end{pmatrix}$$

左辺は縦ベクトル

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

だから、 $x_1 = 5/7, x_2 = -8/7, x_3 = -6/7$ である事が分かる。

この計算方法を基本変形による方法という。この計算方法に慣れるまでは大変だが、一度慣れるとクラメルの公式よりはるかに楽である。

基本変形については次節でもう一度詳しく説明する。

練習 8.1 次の連立一次方程式をクラメルの公式を用いた方法と行列の基本変形の方法で解け。

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & -\ x_3 & = & a \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & b \\ 2x_1 & & +3x_3 & = & c \end{cases}$$

練習 8.2 次の連立一次方程式を行列の基本変形の方法で解け。

$$\begin{cases} 4x + y - z & = & 3 \\ 2x + 5y - 4z & = & 0 \\ 3x - 2y + z & = & 2 \end{cases}$$