9　行列の基本変形

9.1　行基本変形

前回行った計算は、次の (I)~(III) で、これらは **行に関する基本変形** と呼ばれる操作である（簡単に**行基本変形**ともいう）。この変形は一般の $m \times n$ 行列に対して行う事ができる操作である。
(I) 1 つの行を 0 でない定数倍する
(II) 1 つの行の定数倍を他の行に加える
(III) 1 つの行と他の行を入れ替える

例 9.1 次のように行基本変形を行う事ができる。

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$m \times n$ 行列 A の行基本変形は A の左から特別な形の m 次正方行列をかけて得る事ができる。

例 9.2 (I の変形操作）第 i 行を r 倍 $(r \neq 0)$ する行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{に対して} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ 0 & & r & & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(第 i 行の対角成分だけ r で、他の対角成分は 1, 対角成分以外は 0 の行列) を左からかけると、 A の第 i 行だけが r 倍され、他は変わらない。

この行列の行列式は r で 0 でないので逆行列があり、第 i 行を r^{-1} 倍する操作に対応している。

例 9.3 (II の変形操作) $i \neq j$ のとき、 第 i 行を r 倍して 第 j 行に加える行列 (次の例は $i < j$ のとき。$i > j$ のときは r が対角線の上にくる)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{に対して} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & \underset{\smile}{i} & & \underset{\smile}{j} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & r & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(対角成分が 1 で, (j, i)-成分が r の他はすべて 0 の行列) を左からかけると、A の第 i 行の成分が r 倍されて同じ列の A の第 j 行の成分に加えられる。

この行列も行列式は 1 なので 0 ではなく、逆行列がある。逆行列は第 i 行を $-r$ 倍して第 j 行に加える操作に対応している。

例 9.4 (III の変形操作) 第 i 行と第 j 行を入れ替える行列 ($i < j$ のとき)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \text{に対して} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ \\ i) \\ \\ j) \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & \underset{\smile}{i} & & \underset{\smile}{j} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & & 0 & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(第 i 行と第 j を除いた対角成分が 1 で、第 i 行は (i, j) 成分が 1, 第 j 行は (j, i) 成分が 1, 残りの成分はすべて 0) を左からかけると A の第 i 行と第 j 行が入れ替わる。

これらの行基本変形 (I),(II), (III) に対応する行列を**行基本行列**とよぶ。

9.2　逆行列を基本変形で求める

n 次の正方行列 A と単位行列 E_n を並べて、同じ行基本変形をしていくと、 A が E_n に変形されたとき、E_n は A^{-1} に変形されているはずである。こうして行基本変形によって逆行列を求めることができる。

例 9.5 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみる。

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

したがって $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ である。

例 9.6 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めてみる。

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

（第 1 行と第 3 行の入れ替えによる。）

したがって $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる。

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/3 & 2/3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1 \end{array}\right)$$

したがって $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & -2 \\ -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

連立一次方程式を解くときも同じような表示を使うことにしよう。

例 9.7 連立一次方程式

$$\begin{cases} 5x & +y & +2z & = & 9 \\ x & +y & +z & = & 7 \\ 9x & +y & +3z & = & 11 \end{cases}$$

を解く。

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & 9 \\ 9 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -4 & -3 & -26 \\ 0 & -8 & -6 & -52 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & -3/4 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & -1 & -3/4 & -13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 13/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となり、 $x + z/4 = 1/2, y + 3z/4 = 13/2$ なので、$z = 4t$ とかくと $x = 1/2 - t, y = 13/2 - 3t$ となる。 (t は任意定数)

練習 9.1 次の行列の逆行列を求めよ

(1) $\begin{pmatrix} 101 & 99 \\ 99 & 101 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$　(3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

練習 9.2 連立一次方程式 $\begin{cases} x - 2y - 2z + 2u & = & 5 \\ 2x - 2y - 3z + 3u & = & 10 \\ -x + 6y + 3z - 2u & = & 2 \\ x + 4y \phantom{{}+3z} - u & = & -10 \end{cases}$ を解け