10　ランク

10.1　行列の標準形

$m \times n$ 行列 A に対して行基本変形を施して次のような**簡約形**にすることができる。

- 行ベクトルのうち、零ベクトルがあれば、それは零でないベクトルの下にある。
- 零ベクトルでない行ベクトルの成分のうち、0 でない一番左の要素（これを主成分という）は 1
- 主成分の位置は行が違うと異なり、下の行ほど右にある。
- 各行の主成分を含む列では、この主成分以外はすべて 0.

例えば、

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

一般には、下の方の行は 0 のみが並ぶこともあり、簡約形は

$$\begin{pmatrix} S & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

の形（ S は各行に主成分 1 が残る行列。O は各成分が 0 の行列（零行列））。S を $r \times q$ 行列とすると $r \leq q$ で、B は $r \times (n-q)$ 行列、下の左側の O は $(m-r) \times q$ 零行列、右側の O は $(m-r) \times (n-q)$ 零行列。

$O_{k,\ell}$ で $k \times \ell$ 零行列を表すものとすれば、さらに列に対して同じような基本変形（列基本変形）を施すと

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

とできる。この形を **標準形**と呼ぶ。

このとき、r の値は基本変形のやりかたによらないことが知られている。r をもとの行列 A の**ランク（階数）** という。

例 10.1 標準形を求める方法は一通りではない。しかし、結果は一致する。基本変形をおこなうと、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また、次のような変形も可能

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

この行列のランクは 3 である。

10.2　ランク

行基本変形はすべて正則な行列を左からかけて表すことができた。同じように列基本変形は正則な行列を右からかけることで表すことができる。したがって、$m \times n$ 行列 A に対して m 次の正則な行列 P と、n 次の正則な行列 Q がとれて PAQ が下のような標準形 S_r の形にかける。

$$S_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ランクの性質をまとめよう。行列 A に対してそのランクを $\operatorname{rank}(A)$ と書く。

1. 行列のランクはこれを標準化する方法によらない。(これは認める)

2. 行列のランクはその転置行列のランクと等しい。

$$\mathrm{rank}(A^T) = \mathrm{rank}(A)$$

実際、

$$PAQ = S_r$$

と正則な行列 P, Q で標準化しておくと $(PAQ)^T = S_r^T$ は標準形で、そのランクはやはり r で、$(PAQ)^T = R^T A^T P^T$ と書くことにより R^T, P^T はそれぞれ基本変形の組合せに対応した行列であることから、A^T を基本変形で標準形 S_r^T に変形しているので、A^T のランクは r である。

3. n 次の正則な行列のランクは n である。

いま、A を n 次の正則な行列とし、その標準形を $S_r(r < n)$ とすると、n 次の正則な行列（基本変形の組合せに対応）P, Q があって、$PAQ = S_r$ となっている。両辺の行列式をとると、$|PAQ| = |P||A||Q| \neq 0$ だが、$|S_r| = 0$ なので、矛盾。A の標準形は E_n でなければいけない。したがって $\mathrm{rank}(A) = n$

4. 任意の n 次の正則な行列 R は 行基本変形の組合せの行列 V と列基本変形の組合せの行列 W によって $R = VW$ と表すことができる。

実際、上のことから R を標準形に直す正則行列 P, Q を P は行基本変形の組合せに対応して、Q は列基本変形に対応するようにとって、

$$PRQ = E_n$$

となるようにできる。この式に P^{-1} を左から、Q^{-1} を右からかけると、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= P^{-1}(PRQ)Q^{-1} = (P^{-1}P)R(QQ^{-1}) = E_nRE_n = R, \\ \text{右辺} &= P^{-1}E_nQ^{-1} = P^{-1}Q^{-1} \end{aligned}$$

なので、$V = P^{-1}, W = Q^{-1}$ ととれば良い。

5. $m \times n$ 行列 A に対して、m 次の正則行列 R と n 次の正則な行列 S に対して、

$$\mathrm{rank}(RAS) = \mathrm{rank}(A)$$

が成り立つ。

実際、 $PAQ = S_r$ となる m 次の正則行列 P と n 次の正則行列 Q をとると、上と同じようにして

$$A = P^{-1}S_rQ^{-1}$$

なので、これを RAS に代入すると

$$RAS = R(P^{-1}S_rQ^{-1})S = (RP^{-1})S_r(Q^{-1}S)$$

これに左から PR^{-1} を、右から $S^{-1}Q$ をかけると、

$$\begin{aligned} (PR^{-1})RAS(S^{-1}Q) &= (PR^{-1})(RP^{-1})S_r(Q^{-1}S)(S^{-1}Q) \\ &= PE_nP^{-1}S_rQ^{-1}E_nQ = S_r \end{aligned}$$

となるので、RAS は PR^{-1} と $S^{-1}Q$ によって標準化されている。

練習 10.1 次の行列のランクを求めよ。（行基本変形で簡約形まで求めたらランクは分かる。）

$$(1)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$