冬休み用自習問題（模擬テスト風）の解答

1. (1)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \times (-3) = -18\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

よって、A の逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

よって、B の逆行列は $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ となる。

最後に、$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ だから、

$$(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -13 \\ -2 & -5 & 22 \\ 8 & 22 & -95 \end{pmatrix}.$$

3. (1)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 6 & -7 & -3 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ -3 & -9 & 1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 4 & 7 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & 11 & 43 & 32 \\ 0 & -1 & 14 & 15 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & 197 & 197 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -10 & -7 \\ 0 & 1 & -14 & -15 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

したがって、解は $x = 2,\ y = -1,\ z = 1$ である。

(2)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -3 \\ -2 & 0 & -3 & -11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -7 & -17 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ゆえに、解は $x = 1,\ y = -2,\ z = 3$ である。

4. (1)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a & 0 \end{array}\right)$$

したがって、$b - 2a \neq 0$ のとき、右辺はさらに

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-b \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

と基本変形され、係数行列のランクは 2, 拡大係数行列のランクは 3 と一致しないので、この連立一次方程式に解は無い。

$b - 2a = 0$ のとき、拡大係数行列は

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と基本変形されており、ランクは 2 で、係数行列のランクと一致する。したがってこのとき解が有る。

以上より、与えられた連立一次方程式が解を持つためには $b = 2a$ でなくてはいけない。

(2) 上の変形により、$a \neq 0$ のとき、

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ -1 & -2 & 1-a & 0 \\ 2 & 4 & b & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1-a \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

と基本変形され、これは $a = 0$ のときの上の変形の結果

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

とも等しい。これより $b = 2a$ のとき、解は $y = t$ とかくと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。