11 月 19 日分 練習の解答

練習 7.1 (i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと、$|A| = 1$ である。余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよう。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{11} &= |\overline{A_{11}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \qquad \tilde{A}_{12} & \quad -|\overline{A_{12}}| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{13} &= |\overline{A_{13}}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & \qquad \tilde{A}_{21} &= -|\overline{A_{21}}| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{22} &= |\overline{A_{22}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 & \qquad \tilde{A}_{23} &= -|\overline{A_{23}}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{31} &= |\overline{A_{31}}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 & \qquad \tilde{A}_{32} &= -|\overline{A_{32}}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{33} &= |\overline{A_{33}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1
\end{aligned}$$

したがって、$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となり、$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。これより、

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと、$|A| = -1$ である。余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよう。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{11} &= |\overline{A_{11}}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 & \qquad \tilde{A}_{12} &= -|\overline{A_{12}}| = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{13} &= |\overline{A_{13}}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \qquad \tilde{A}_{21} &= -|\overline{A_{21}}| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{22} &= |\overline{A_{22}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 & \qquad \tilde{A}_{23} &= -|\overline{A_{23}}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
\tilde{A}_{31} &= |\overline{A_{31}}| = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 & \qquad \tilde{A}_{32} &= -|\overline{A_{32}}| = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \\
\tilde{A}_{33} &= |\overline{A_{33}}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

したがって、$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ なので、$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ となり、

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) $A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 4 & -8 & 13 \end{pmatrix}$ とおくと、

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -11 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 3 & -4 & 6 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 \times (-6+4) = 10$$

余因子行列 $\tilde{A}$ を求めよう。

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{11} &= |\overline{A_{11}}| = \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = -4 & \tilde{A}_{12} &= -|\overline{A_{12}}| = -\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = -15 \\
\tilde{A}_{13} &= |\overline{A_{13}}| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = -8 & \tilde{A}_{21} &= -|\overline{A_{21}}| = -\begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} = 10 \\
\tilde{A}_{22} &= |\overline{A_{22}}| = \begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 4 & 13 \end{vmatrix} = 5 & \tilde{A}_{23} &= -|\overline{A_{23}}| = -\begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} = 0 \\
\tilde{A}_{31} &= |\overline{A_{31}}| = \begin{vmatrix} 6 & -11 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = -8 & \tilde{A}_{32} &= -|\overline{A_{32}}| = -\begin{vmatrix} -3 & -11 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -15 \\
\tilde{A}_{33} &= |\overline{A_{33}}| = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -6
\end{aligned}$$

したがって、$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -4 & -15 & -8 \\ 10 & 5 & 0 \\ -8 & -15 & -6 \end{pmatrix}$ なので、$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ となり、

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 \\ -15 & 5 & -15 \\ -8 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

講評　逆行列の公式は符号に注意しないといけないし、余因子行列の転置をとらないといけないし、結構面倒ですね。まあ、これは公式を覚える必要は無く、教科書の公式を見ながら注意深く計算すればよいという事です。

間違った人は転置をとり忘れるか、符号を間違えるかがほとんどで、行列式の計算はできていました。皆さん、少し行列式の計算になれた感じですね。

これから掃き出し法を習いますが、計算のやりかたは行列式の変形によく似ています。行列式の計算ができるようになっていれば大分これからの計算が楽になるはずです。