12月03日分 練習の解答

練習 9.1 (1)

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 101 & 99 & 1 & 0 \\ 99 & 101 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 200 & 200 & 1 & 1 \\ 99 & 101 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{200} & \frac{1}{200} \\ 99 & 101 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{200} & \frac{1}{200} \\ 0 & 2 & -\frac{99}{200} & \frac{101}{200} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{200} & \frac{1}{200} \\ 0 & 1 & -\frac{99}{400} & \frac{101}{400} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{101}{400} & -\frac{99}{400} \\ 0 & 1 & -\frac{99}{400} & \frac{101}{400} \end{array}\right)$$

したがって求める逆行列は $\begin{pmatrix} \frac{101}{400} & -\frac{99}{400} \\ -\frac{99}{400} & \frac{101}{400} \end{pmatrix}$

(2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 4 & 2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{array}\right)$$

したがって求める逆行列は $\begin{pmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

したがって求める逆行列は $\begin{pmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

練習 9.2

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & -3 & 3 & 10 \\ -1 & 6 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & -1 & -10 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 2 & -3 & -15 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -15 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 22 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & -2 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 11 \end{array}\right) \qquad \text{したがって答は} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$$

講評

今回も問題が多すぎましたね。反省しています。たくさんの人が時間内に終われず、昼食が遅くなってしまいました。やはり焦ったせいか、計算ミスが続出しました。落ち着いて計算すれば、ミスは大分少なくなると思います。

逆行列になっているかどうか検算してみましょう。元の行列とかけて単位行列になれば計算はあっているわけです。方程式のときは、答を元の方程式に代入して確かめてみると、計算があっている（または、まちがっている）事が分かります。検算は求める計算より、大分時間は少なくて済むので、ぜひ、やってみてください。

> 必ず検算しよう！

今回、逆行列を求めるときに、行基本変形と列基本変形を組み合わせて計算した人がいました。これをやると答が違ってしまいます。

なぜなら、行基本変形は左から変形の行列をかけることに対応しており、列基本変形は右から基本変形の行列をかける事に対応します。行基本変形と列基本変形を組み合わせて元の行列を単位行列にしたとすると行基本変形を組み合わせた行列 P と列基本変形を組み合わせた行列 Q をつかって

$$PAQ = E_n$$

となっているわけです。このとき、最初 A の右においていた単位行列 E_n は $PE_nQ = PQ$ に変形を受けています。でも、この PQ を A の右からかけても左からかけても PQA または APQ になるだけで、$PAQ = E_n$ にはなりません。だから、変形の終わりに A が単位行列になっても、その右側に A^{-1} は出て来ていません。

> 逆行列を求めるときは行基本変形だけを繰り返して求める事！

これは、非常によい間違いでした。