補題 1.2 (Borel-Cantelli の補題) $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき以下が成立.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ ならば,

$$P(\text{無限個の } n \text{ について } A_n \text{ が成立}) = P(\cap_{k\geq n} \cup_{n\geq 1} A_k) = 0$$

(ii) 逆に，$\{A_n\}$ が独立で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ ならば,

$$P(\text{無限個の } n \text{ について } A_n \text{ が成立}) = 1$$

証明 (i) 確率の劣加法性により,

$$P(\cup_{k\geq n} A_n) \leq \sum_{k\geq n} P(A_n). \tag{1.3}$$

条件より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ なので，(1.3) 右辺は $n \to \infty$ のとき 0 に収束する．一方，(1.3) 左辺は $n \to \infty$ のｔき，確率の連続性から $P(\cap_{k\geq n} \cup_{n\geq 1} A_k)$ に収束.

(ii) $\{A_n\}_{n\geq 1}$ の独立性から，任意の $k < \ell$ について,

$$P(\{\cup_{k\leq n\leq \ell} A_n\}^c) = P(\cap_{k\leq n\leq \ell} A_k^c) = \prod_{k\leq n\leq \ell} P(A_n^c).$$

$0 \leq x \leq 1$ に対して $1 - x \leq e^{-x}$ だから，$P(A_n^c) \leq e^{-P(A_n)}$ となる．ゆえに,

$$\prod_{k\leq n\leq \ell} P(A_n^c) \leq \exp\{-\sum_{k\leq n\leq \ell} P(A_n)\}.$$

条件より，上式右辺は $m \to \infty$ のとき 0 に収束するので,

$$P(\cup_{n\geq k} A_n) = 1.$$

$k \geq 1$ について共通部分を取って，結論を得る．

1.3 Brown 運動のモーメントの計算

定理 1.3 $\{B(t),\ t \in [0,\infty)\}$ を一次元 Brown 運動とするとき,

(i) $0 \leq s < t < \infty$ ならば,

$$E\left[B(t)B(s)\right] = \min\{s,t\} = s.$$

(ii) $t > 0$ のとき, n を自然数として,

$$E\left[B(t)^{2n-1}\right] = 0, \quad E\left[B(t)^{2n}\right] = \frac{(2n)!t^n}{n!2^n} \tag{1.4}$$

練習問題 1.1 定理 1.3 を証明せよ.
ヒント：$B(t) - B(s)$ は $B(s)$ と独立．また、

$$E\left[B(t)^k\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dx$$

である。

1.4 連続性

確率過程の連続性については，有名な Kolmogorov の連続性条件がある．この定理を正確に理解するためには無限次元空間上の確率測度についての知識が必要になるが，ここでは省略する．二つの確率過程 $X(t), Y(t)$, $(t \in [0,\infty)$ は,

$$P(X(t) \neq Y(t)) = 0$$

がすべての $t \in [0,\infty)$ について成り立つとき，**同値**であると言い，同値な確率過程は同一視する．

定理 1.4 (Kolmogorov **の連続性定理**) 確率過程 $\{X(t)\ ;\ t \in [0,\infty)\}$ が，ある $\alpha, \beta, \gamma > 0$ と任意の $t, s \in [0,\infty)$ $(s < t)$ に対して

$$E\left(|X(t) - X(s)|^{\alpha}\right) \leq \beta |t-s|^{1+\gamma} \tag{1.5}$$

を満たすならば，X と同値な確率過程 Y で,

$$P(\{\omega\ ;\ Y(t,\omega) \text{ は } t \in [0,\infty) \text{ の連続関数 }\}) = 1$$

となるものが存在する（つまり，同一視の意味で X が連続と思って良い）.

証明 $X(t)$ を 2 進有理点の時刻の全体

$$\mathbf{D} = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \ldots \ ; \ n = 0, 1, \ldots\}$$

に制限した確率過程 $X^{\mathbf{D}}(t)$ が，任意の $T > 0$ に対し，確率 1 で $[0, T] \cap \mathbf{D}$ 上で一様に連続なことをまず示す．このとき，

$$\begin{aligned} & P\left(\{\omega\ ;\ \ X^{\mathbf{D}}(t;\omega) \text{ は，任意の区間 } [0,T]\cap\mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\ = & \lim_{T\to\infty} P\left(\{\ X^{\mathbf{D}}(t;\omega) \text{ は，} [0,T]\cap\mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\ = & \ 1 \end{aligned} \tag{1.6}$$

となることに注意する．

任意に自然数 T をとめておく．$n, k \geq 1$ に対して，条件より，

$$E\left(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})|^{\alpha}\right) \leq \beta 2^{-n(1+\gamma)} \tag{1.7}$$

を得る．Chebyshev の不等式（補題 1.1) により，

$$P(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \geq 2^{-\delta n}) \leq 2^{-n(1+\gamma-\delta\alpha)}$$

となるので，ここで $\delta = \dfrac{\gamma}{2\alpha} > 0$ ととると，上式右辺は $2^{-n(1+\frac{\gamma}{2})}$ となる．上式左辺の事象を $A_n(k)$ と書くと，

$$\begin{aligned} & P(\max_{0\leq k\leq T2^n-1} |X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \geq 2^{-\delta n}) \\ = \ & P(\bigcup_{0\leq k\leq T2^n-1} A_n(k)) \\ \leq \ & T2^{-\frac{n\gamma}{2}} \end{aligned}$$

$B_n = \displaystyle\bigcup_{0\leq k\leq T2^n-1} A_n(k)$ と書くと，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty.$$

だから，Borel-Cantelli の補題（補題 1.2）により，確率 1 で B_n は有限回しか起こらない．これは，$X^{\mathbf{D}}$ が $[0, T]$ 上で一様連続である確率が 1 である事を示している．T についての共通部分の確率もまた 1 である．

次に，$X^{\mathbf{D}}(t,\omega)$ が，任意の区間 $[0,T]$ 上で一様連続な ω に対しては，

$$Y(t,\omega) := \lim_{\substack{r \to t, \\ r \in \mathbf{D}}} X(r,\omega)$$

が任意の $t \in [0,\infty)$ に対して定義出来る．

そうでない ω に対しては，$Y(t,\omega) := 0$ と定義すると，$Y(t,\omega)$ は，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $[0,\infty)$ 上の連続関数となっている．

練習問題 1.2 上の X と Y が同値であることを証明せよ．つまり，任意の $t \in [0,\infty)$ に対して

$$P\left(X(t) \neq Y_t\right) = 0$$

を示せ．

系 1.5 一次元 *Brown* 運動は連続な確率過程である．

証明 Brown 運動の定義から，$o \leq s < t$ のとき，

$$E\left[|B(t) - B(s)|^4\right] = 3(t-s)^2$$

だから，定理 1.4 により Brown 運動は連続な確率過程となる．