前回の 補足
Kolmogorov **の連続性定理**

> 確率過程 $\{X(t)\ ;\ t \in [0,\infty)\}$ が，ある $\alpha,\beta,\gamma > 0$ と任意の $t, s \in [0,\infty)$ $(s < t)$ に対して
>
> $$E\left(|X(t) - X(s)|^{\alpha}\right) \le \beta |t-s|^{1+\gamma} \tag{1.2.1}$$
>
> を満たすならば，X と同値な確率過程 Y で，
>
> $$P(\{\omega\ ;\ Y(t,\omega) \text{ は } t \in [0,\infty) \text{ の連続関数 }\}) = 1$$
>
> となるものが存在する（つまり，同一視の意味で X が連続と思って良い）.

の証明をしていた.
証明 $X(t)$ を 2 進有理点の時刻の全体

$$\mathbf{D} = \{\frac{k}{2^n}; k = 0, 1, \ldots\ ;\ n = 0, 1, \ldots\}$$

に制限した確率過程 $X^{\mathbf{D}}(t)$ が，任意の $T > 0$ に対し，確率 1 で $[0,T] \cap \mathbf{D}$ 上で一様に連続なことをまず示す．このとき，

$$\begin{aligned} & P\left(\{\omega\ ;\ \ X^{\mathbf{D}}(t;\omega) \text{ は，任意の区間 } [0,T] \cap \mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\ = & \lim_{T\to\infty} P\left(\{\ X^{\mathbf{D}}(t;\omega) \text{ は，} [0,T] \cap \mathbf{D} \text{ 上で一様連続 }\}\right) \\ = & \ 1 \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

となることに注意する.
任意に自然数 T をとめておく．$n, k \ge 1$ に対して，条件より，

$$E\left(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})|^{\alpha}\right) \le \beta 2^{-n(1+\gamma)} \tag{1.2.3}$$

を得る．Chebyshev の不等式（補題**??**）により，

$$P(|X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \ge 2^{-\delta n}) \le 2^{-n(1+\gamma-\delta\alpha)}$$

となるので，ここで $\delta = \dfrac{\gamma}{2\alpha} > 0$ ととると，上式右辺は $2^{-n(1+\frac{\gamma}{2})}$ となる．上式左辺の事象を $A_n(k)$ と書くと，

$$
\begin{aligned}
& P(\max_{0\le k\le T2^n-1} |X^{\mathbf{D}}(\frac{k+1}{2^n}) - X^{\mathbf{D}}(\frac{k}{2^n})| \ge 2^{-\delta n}) \\
= \;& P(\bigcup_{0\le k\le T2^n-1} A_n(k)) \\
\le \;& T2^{-\frac{n\gamma}{2}}
\end{aligned}
$$

$B_n = \displaystyle\bigcup_{0\le k\le T2^n-1} A_n(k)$ と書くと，

$$
\sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) < \infty.
$$

だから，Borel-Cantelli の補題（補題 1.2）により，確率 1 で B_n は有限回しか起こらない．すなわち，確率 1 の ω に対して，ある $N = N(\omega) \in \mathbf{N}$ が存在し，$n \ge N$ ならば

$$
|X((k+1)2^{-n}) - X(k2^{-n})| < 2^{-\delta n} \tag{1.2.4}
$$

が成り立っている．

いま，このような ω を一つとめ，$X(t) = X(t,\omega)$ が $[0,T]\cap\mathbf{D}$ で一様連続であることを示す．これにはある定数 $C > 0$ がとれて，$s,t \in \mathbf{D}\cap[0,T], s < t$ を $|t-s| < 2^{-N}$ とするとき，

$$
|X(t) - X(s)| < C|t-s|^{\delta} \tag{1.2.5}
$$

となることを示せば十分．$m \ge 1$ を

$$
2^{-(N+m)} \le |t-s| < 2^{-(N+m-1)}
$$

を満たすようにとると，$[s,t]$ には $k2^{-(N+m)}$ の形の点が少なくとも 1 個，多くとも 2 個存在する.（3 つあると $|t-s| \ge 2^{-(N+m-1)}$ ）以下の議論はどちらでも同様なので，2 個あるとしてこれらを

$$
t_1 = j2^{-(N+m)},\ t_2 = (j+1)2^{-(N+m)}
$$

と書くことにする．このとき，$|t_1 - s| < 2^{-(N+m)}, |t - t_2| < 2^{-(N+m)}$ でないと別の $k2^{-(N+m)}$ の形の点が $[s,t]$ にあることになるので，この不等式が

成り立っている．したがって $t_1 - s, t - t_2$ をそれぞれ 2 進法展開すると，

$$t_1 - s = \sum_{p=1}^{\ell_1} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)}, \quad t - t_2 = \sum_{p=1}^{\ell_2} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)}$$

と書ける．ただし，$\varepsilon_p, \tilde{\varepsilon}_p \in \{0,1\}$ である．このとき，(1.2.4) により，

$$\begin{aligned}
|X(t_1) - X(s)| &\le \sum_{q=1}^{\ell_1} |X(t_1 - \sum_{p=1}^{q-1} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)}) - X(t_1 - \sum_{p=1}^{q} \varepsilon_p 2^{-(N+m+p)})| \\
&\le \sum_{q=1}^{\ell_1} \varepsilon_q 2^{-\delta(N+m+q)} \\
|X(t_2) - X(t_1)| &\le 2^{-\delta(N+m)} = |t_2 - t_1|^\delta \\
|X(t) - X(t_2)| &\le \sum_{q=1}^{\ell_2} |X(t_1 - \sum_{p=1}^{q-1} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)}) - X(t_1 - \sum_{p=1}^{q} \tilde{\varepsilon}_p 2^{-(N+m+p)})| \\
&\le \sum_{q=1}^{\ell_2} \tilde{\varepsilon}_q 2^{-\delta(N+m+q)}
\end{aligned}$$

を得る．$q_1 = \min\{q : \varepsilon_q \neq 0\}$ とおくと

$$2^{-(N+m+q_1)} \le |t_1 - s| < 2^{-(N+m+q_1-1)}$$

だから，

$$|X(t_1) - X(s)| < \sum_{q=q_1}^{\infty} 2^{-\delta(N+m+q)} \le (1 - 2^{-\delta})^{-1} |t_1 - s|^\delta.$$

同様に

$$|X(t) - X(t_2)| < (1 - 2^{-\delta})^{-1} |t_1 - s|^\delta$$

なので，これらをあわせると

$$|X(t) - X(s)| < 3(1 - 2^{-\delta}) |t - s|^\delta$$

となり，(1.2.5) が示せた．T についての共通部分をとることにより $X(t)$ は確率 1 で 任意の $[0,T] \cap \mathbf{D}$ において一様連続なことが分かる．

次に，$X^{\mathbf{D}}(t,\omega)$ が，任意の区間 $[0,T]$ 上で一様連続な ω に対しては，

$$Y(t,\omega) := \lim_{\substack{r \to t, \\ r \in \mathbf{D}}} X(r,\omega)$$

が任意の $t \in [0, \infty)$ に対して定義出来る．

そうでない ω に対しては，$Y(t, \omega) := 0$ と定義すると，$Y(t, \omega)$ は，任意の $\omega \in \Omega$ に対して $[0, \infty)$ 上の連続関数となっていることを示そう．

$r, r' \in \mathbf{D} \cap [0, T]$ として (1.2.5) を使うと，

$$|X(r) - X(r')| < C|r - r'|^{\delta}$$

ここで $r, r' \in \mathbf{D} \cap [0, T]$ を保ちながら $r \to s, r' \to t$ とすると $X(r) \to Y(s), X(r') \to Y(t)$ だから

$$|Y(s) - Y(t)| \leq C|t - s|^{\delta}$$

したがって Y は確率 1 で任意の $[0, T]$ 上で一様連続.

X が (1.2.5) を満たさないところでは $Y \equiv 0$ だから Y はもちろん一様連続で、したがってすべての ω で $Y(t, \omega)$ は t の連続関数。(任意の T に対して $[0, T]$ 上で一様連続)

練習問題 1.3 上の X と Y が同値であることを証明せよ．つまり，任意の $t \in [0, \infty)$ に対して

$$P\left(X(t) \neq Y_t\right) = 0$$

を示せ．

系 1.6 一次元 *Brown* 運動は連続な確率過程である．

証明 Brown 運動の定義から，$o \leq s < t$ のとき，

$$E\left[|B(t) - B(s)|^4\right] = 3(t - s)^2$$

だから，定理**??** により Brown 運動は連続な確率過程となる．