第2章　Brown 運動の構成: Gauss 系として

2.1　Gauss 系

定義 2.1 (Gauss 系) 確率変数の系 $\{X_\alpha\ ;\ \alpha \in \Lambda\}$ が Gauss 系であるとは，任意の自然数 n と，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \Lambda$ に対して，n 次元確率変数 $(X_{\alpha_1}, \ldots, X_{\alpha_n})$ の特性関数が

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha_a,\ldots,\alpha_n}(u_1,\ldots,u_n) &= E\left[\exp\{i\sum_{k=1}^n u_j X_{\alpha_k}\}\right] \\ &= \exp\{i\sum_{k=1}^n u_k m_k - \frac{1}{2}\sum_{k,\ell=1}^n V_{k,\ell}u_k u_\ell\} \quad (2.1)\end{aligned}$$

（ただし，$V = (V_{k,\ell})$ は，$n \times n$ 非負定値行列）の形に書けるときに言う．もちろん V は $\{\alpha_k\}$ の選びかたで変わる．

例 2.1 X が 1 次元確率変数ならば，1 個だけの確率変数系 $\{X\}$ は *Gauss* 系 である．

練習問題 2.1 (2.1) を u_j について微分して，$u_1 = \ldots = u_n = 0$ とおくことにより，

$$EX_j = m_j$$

を示せ．また，u_i, u_j について微分して， $u_1 = \ldots = u_n = 0$ とおくことにより，

$$Cov(X_i, X_j) = E(X_i - m_i)(E_j - u_j) = V_{i,j}$$

である事を確かめよ．

定理 2.1 　(i) $X_1, \ldots, X_n$ がそれぞれ独立な 1 次元 *Gauss* 確率変数のとき，その和 $X_1 + \ldots + X_n$ もまた 1 次元 *Gauss* 確率変数となる．

(ii) $\{X_n\}_{n\ge1}$ が 1 次元 *Gauss* 確率変数の列で，X_n の分布が X の分布に収束するならば，X もまた *Gauss* 確率変数となる．

練習問題 2.2 上の定理を証明せよ.（ヒント : (i) では $X_1, \ldots, X_n$ が独立な事から $X_1 + \ldots + X_n$ の特性関数

$$\psi(t) = E\left[e^{it(X_1+\ldots+X_n)}\right]$$

が、それぞれの特性関数

$$\phi_j(t) = E\left[e^{itX_j}\right], \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

の積になる．これから，$\psi(t)$ が 1 次元 *Gauss* 確率変数の特性関数になっている事を示せばよい．(ii) では確率変数の分布が収束すれば特性関数が各点収束する事を使えば良い．

練習問題 2.3 $\{X_n; n \ge 1\}$ が独立な 1 次元 *Gauss* 確率変数の時，これは *Gauss* 系であることを証明せよ．

定理 2.2 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と $\{Y_\beta\}_{\beta\in B}$ が，それぞれ *Gauss* 系のとき，$\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と $\{Y_\beta\}_{\beta\in B}$ が独立であるための必要かつ十分な条件は

$$\mathrm{cov}(X_\alpha, Y_\beta) = E\left[(X_\alpha - EX_\alpha)(Y_\beta - EY_\beta)\right] = 0$$

となることである．

練習問題 2.4 上の定理を証明せよ．十分性については，任意の $k \ge 1$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in A$ および $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}$ に対して

$$Y = \sum_{j=1}^k t_j X_{\alpha_j}$$

の特性関数がそれぞれの $t_j X_{\alpha_j}$ の特性関数の積になっている事を確かめればよい。

2.2　三角関数系を使った Brown 運動の構成

定理 2.3 $\xi_0, \xi_1, \ldots$ を独立な $N(0,1)$ に従う確率変数の列とする．このとき，$t \in [0, \pi]$ に対して

$$X(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}}\xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nt}{n}\xi_n \tag{2.2}$$

とおくと，$X(t)$ は $t \in [0,\pi]$ のとき *Brown* 運動となる．

証明 $X(t)$ が Gauss 確率変数であることは定理 2.2 からわかる．（有限和が L^2-収束）$X(t)$, $t \in [0,\pi]$ の任意有限個の一次結合はまた一次元 Gauss 確率変数になっていることは，上と同じ理由でわかる．

$$\mathrm{cov}(X(t), X(s)) = \min\{s,t\} \tag{2.3}$$

をまず示す．これにより，$0 \le u \le s < t$ のとき，

$$\mathrm{cov}(X(t)-X(s), X(u)) = \mathrm{cov}(X(t), X(u)) - \mathrm{cov}(X(s), X(u)) = u - u = 0$$

となり，独立性が示せる．2.3 は，Fourier 級数の計算からわかる．

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi t \sin nt dt &= -\frac{\pi}{n}\cos n\pi \\
\int_0^\pi \min\{s,t\}\sin nt dt &= \frac{1}{n^2}\sin ns - \frac{s}{n}\cos n\pi \\
&= \frac{1}{n^2}\sin ns + \frac{s}{\pi}\int_0^\pi t\sin nt dt
\end{aligned}$$

これより，

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\pi n^2}\sin nt \sin ns + \frac{1}{\pi}ts = \min\{s,t\}.$$

また，$EX(t) = 0$ は定義から明らか．

$X_n(t)$ を上の $X(t)$ と同じ様にして作った独立な $[0,\pi]$ 上の Brown 運動とする．求める $[0,\infty)$ 上の Brown 運動 $B(t)$ は，

$$B(t) = \sum_{n=1}^\infty 1_{[0,n\pi)}(t) X_n(\min\{t, n\pi\} - (n-1)\pi)$$

と定めることができる．