3.4 伊藤の公式（Ito formula）

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，次の様な確率過程を考える．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)ds + \int_0^t a(s,\omega)dB(s) \tag{3.4.1}$$

ここに， $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ はともに $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程で，任意の $T>0$ に対して

$$\int_0^T |b(s,\omega)|ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.4.2}$$

$$\int_0^T |a(s,\omega)|^2 ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.4.3}$$

をみたすものとする．このような確率過程は**伊藤過程**ともよばれ，連続な確率過程の重要な例として知られている．

定理 3.6 M_t が連続な $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールで，

$$M_t = \int_0^t K_s\,ds \quad \text{ただし} \quad \int_0^T |K_s|\,ds < \infty \;\; a.s.,$$

ならば

$$M_t = 0 \quad \forall t \le T, \quad a.s.$$

となる

この定理は伊藤過程の分解 (3.4.1) が一意的であることを意味している．

定理 3.7（**伊藤の公式**）f が C^2 級の関数の時，(3.4.1) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) \quad &+ \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega)f'(X(s)) + \frac{1}{2}a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds \\ &+ \quad \int a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

例 3.1 $f(x) = x^2, X(t) = B(t)$ に対して伊藤の公式を使うと、$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$ また (3.4.1) において、$a(t) = 1, b(t) = 0$ なので、

$$B(t)^2 = B(0)^2 + \int_0^t \frac{1}{2} \times 2ds + \int_0^t 2B(s)dB(s) = t + 2\int_0^t B(s)dB(s)$$

したがって、 $B(t)^2 - t$ というマルチンゲールは実は

$$2\int_0^t B(s)dB(s)$$

という形をしている事がわかる。

例 3.2 次の方程式を解きたい.

$$S(t) = x_0 + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dB(s)) \tag{3.4.5}$$

形式的には

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu ds + \sigma dB(s)$$

と書けるので, $\log S(t)$ を考えてみると,伊藤の公式により,

$$\log S(t) - \log x_0 = \int_0^t \frac{\mu ds}{S(s)} - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds + \int_0^t \sigma dB(s)$$

となり, これより,

$$S(t) = x_0 \exp\{\int_0^t \sigma dB(s) + \int_0^t (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)ds\}$$

でなければばならないことがわかる. 実際 $f(x) = e^x$ について, $X(t) = x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$ とおくと, 伊藤の公式から上の $S(t)$ が (3.4.5) を満たすことがわかる.

伊藤の公式の多次元への拡張は次のようになる。証明の方法は 1 次元のときと本質的に変わりはない。

定理 3.8 $f : [0,\infty) \times \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}$ は $C^{1,2}$-級の関数とし, $\mathbf{R}^n$ に値をとる確率過程 $X(t)$ が

$$X_j(t) = X_j(0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t a_{j,k}(s,\omega)dB_k(s) + \int_0^t b_j(s,\omega)ds$$

を満たすものとする. ただし, $a_{j,k}(t,\omega)$, $b_j(t,\omega)$ はそれぞれ *a.s.* で次の条件をみたすものとする.

$$\int_0^t a_{j,k}(s,\omega)^2 ds < \infty, \quad \int_0^t |b_j(s,\omega)|ds < \infty$$

また, $B_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,d$ は独立な *Brown* 運動とする. このとき,

$$\begin{aligned} f(t,X(t)) &= f(0,X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X(s))ds \\ &+ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(x,X(s))a_{j,k}(s,\omega)dB_k(s) \\ &+ \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s,X(s))b_j(s,\omega)ds \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^d \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X(s))a_{i,k}a_{j,k}ds \end{aligned}$$

例 3.3 $B(t), W(t)$ を独立な $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動として、$Z(t) = e^{aB(t)+bW(t)}$ に対して伊藤の公式を使う。

$X_1(t) = aB(t), X_2(t) = bW(t)$ として、$f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ を用いると $Z(t) = f(X_1(t), X_2(t))$ なので、$f_{x_i} = f, f_{x_i,x_j} = f, i, j = 1, 2$ に注意して、伊藤の公式により、

$$\begin{aligned}
Z(t) &= Z(0) + \int_0^t f_{x_1}(X_1(s), X_2(s))dX_1(s) + \int_0^t f_{x_2}(X_1(s), X_2(s))dX_2(s) \\
&\quad \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_1,x_1}(X_1(s), X_2(s))a^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_2,x_2}(X_1(s), X_2(s))b^2 ds \\
&= 1 + \int_0^t Z(s)(adB(s) + bdW(s)) + \frac{1}{2}\int_0^t Z(s)(a^2 + b^2)ds
\end{aligned}$$

練習問題 3.3 次の $X(t)$ について伊藤の公式を計算せよ。ただし、$B(t)$, $W(t)$ は独立なブラウン運動とする。

(i) $X(t) = B^3(t)$

(ii) $X(t) = (B(t) + at)^5$ $\quad a$ は定数。

(iii) $X(t) = \log(1 + B(t)^2 + W(t)^2)$

(iv) $X(t) = e^{at+bB(t)}$ $\quad a, b$ は定数

(v) $X(t) = B(t)W(t)$

(vi) $X(t) = B(t)e^{B(t)}$

(vii) $X(t) = \exp\{i\int_0^t a(s)dB(s)\}$ $\quad a(t)$ は *non-random* な連続関数

練習問題 3.4

$$X(t) = e^{-bt}\{a + \int_0^t e^{bs}dB(s)\}$$

は次の確率微分方程式を満たすことを示せ。

$$X(t) = a + B(t) - b\int_0^t X(s)ds$$

練習問題 3.5 $n \geq 0$ に対して *Hermite* 多項式 $H_n(t, x)$ を

$$H_n(t, x) = \frac{(-t)^n}{n!}e^{x^2/(2t)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2/(2t)}$$

と定める。このとき、

(i) 次の等式を証明せよ。ただし、γ は実数とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty}\gamma^n H_n(t, x) = \exp\{\gamma x - \frac{\gamma^2 t}{2}\}$$

(ii) $M_\gamma(t)$ を

$$M_\gamma(t) = \exp\{\gamma B(t) - \frac{\gamma^2 t}{2}\}$$

とおくとき、$M_\gamma(t)$ は次の確率微分方程式を満たすことを証明せよ。

$$M_\gamma(t) = 1 + \int_0^t M_\gamma(s) dB(s)$$

(iii) 上の確率微分方程式を満たす確率過程は $M_\gamma(t)$ のみであることが知られている。このことを使って、

$$\mathcal{Z}_n(t) = H_n(t, B(t))$$

に対して、

$$M_\gamma(t) = \sum_0^\infty \gamma^n \mathcal{Z}_n(t)$$

をこの確率微分方程式に代入して

$$\mathcal{Z}_{n+1}(t) = \int_0^t \mathcal{Z}_n(s) dB(s)$$

が成り立つことを証明し、

$$H_n(t, B(t)) = \int_0^t dB(t_1) \int_0^{t_1} dB(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} dB(t_n)$$

を証明せよ。