3.4 伊藤の公式 (Ito formula)

伊藤の公式の証明

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，次の様な確率過程を考える．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)ds + \int_0^t a(s,\omega)dB(s) \tag{3.4.1}$$

ここに， $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ はともに $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程で，任意の $T>0$ に対して

$$\int_0^T |b(s,\omega)|ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.4.2}$$

$$\int_0^T |a(s,\omega)|^2 ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.4.3}$$

をみたすものとする．

定理 3.7 (**伊藤の公式**) f が C^2 級の関数の時，(3.4.1) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) \quad &+ \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega)f'(X(s)) + \frac{1}{2}a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds \\ &+ \quad \int a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

証明 f がコンパクトな台を持ち，a,b が有界な場合を考える．f,f',f'' はこのときすべて有界かつ一様連続となっていることに注意する．さらに a は階段形過程であると仮定する．任意に $t>0$ を固定する．$\{t_k^{(n)}; 0 \le k \le 2^n\}$ は $[0,t]$ の 2^n 等分点と a の $[0,t]$ の分点をあわせたものを小さい順に並べたものとする．$(t_0^{(n)} = 0,\ t_{\beta(n)}^{(n)} = t)$.

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left[f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \right]$$

として，各 j において 2 次まで Taylor 展開．

$$\begin{aligned} f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \quad &= \quad f'(X(t_{j-1}^{(n)}))[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})] \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(\theta_j^{(n)})[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})]^2. \end{aligned}$$

右辺第 1 項の和を I, 第 2 項の和を II とかく．

$$\begin{aligned} I \quad &= \quad \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\big] \\ &= \quad \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s) \\ &= \quad \int_0^t f'(X(s))b(s,\omega)ds + \int_0^t f'(X(s))a(s,\omega)dB(s) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]b(s,\omega)ds \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]a(s,\omega)dB(s) \\ &:= \quad I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

I_1 と I_2 は (3.4.4) の右辺に現れている．

$n \to \infty$ のとき $I_3 \to 0$ (t について広義一様)a.s. が成り立つ．なぜなら，$f'(X(t))$ は t について一様連続なので，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]b(s,\omega)ds \\ &\le \quad \Big(\sup_{\substack{|u-v| \le 2^{-n}, \\ u,v \in [0,T]}} |f'(X(u)) - f'(X(v))| \Big) \int_0^t |b(s,\omega)|ds. \end{aligned}$$

右辺は t について広義一様に 0 に収束する．

$I_4 \to 0 \quad in\ L^2(P)$ である．なぜなら，定理 3.5 により，

$$\begin{aligned} &E\Big(\sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]a(s,\omega)dB(s) \Big)^2 \\ &= \quad \sum_{j=1}^{\beta(n)} E \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]^2 a(s,\omega)^2 ds. \end{aligned}$$

f' が有界かつ連続なことと，X の連続性から有界収束定理により右辺は 0 に収束．以上より，I は $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^t a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) + \int_0^t b(s,\omega)f'(X(s))ds$$

に収束．(この収束は少なくとも確率収束)

II の計算に移ろう．

$$
\begin{aligned}
2II &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\Big[X(t_j^{(n)})-X(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right)^2 \\
&:= II_1+II_2+II_3
\end{aligned}
$$

f'' の一様連続性と，b の有界性，確率積分の連続性により，$n\to\infty$ のとき，$II_2, II_3\to 0\ \ a.s.$ は簡単にわかる．一方，

$$
\begin{aligned}
II_1 &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}}[a(s,\omega)dB(s)]^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)}[f''(\theta_j^{(n)})-f''(X(t_{j-1}^{(n)}))]\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\
&:= II_{1,a}+II_{1,b}
\end{aligned}
$$

$E|II_{1,b}|\to 0$ である．なぜなら，

$$
\begin{aligned}
E|II_{1,b}| &\le \left(E\Big[\sup_{\substack{u,v\in[0,t]\\ |u-v|\le 2^{-n}}}|f''(X(u))-f''(x(v))|\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(E\Big[\sum_{j=1}^{\beta(n)}(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s))^2\Big]^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

で、分割の各区間で a は一定なので、

$$
\begin{aligned}
& E\left[\left(\sum_{j=1}^{\beta(n)}(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s))^2\right)^2\right] \\
=\ & \sum_{j=1}^{\beta(n)}\sum k=1^{\beta(n)}E\left[a(t_{j-1}^{(n)},\omega)^2a(t_{k-1}^{(n)},\omega)^2\left(B(t_j^{(n)})-B(t_{j-1}^{(n)})\right)\left(B(t_k^{(n)})-B(t_{k-1}^{(n)})\right)\right] \\
\le\ & \sum_{j,k} Const.(t_j-t_{j-1})(t_k-t_{k-1})\le Const.t^2<\infty
\end{aligned}
$$

なので、$f''(X(s))$ の有界性と一様連続性から $E|II_{1,b}|$ は 0 に収束する．$II_{1,a}$ の代わりに

$$
III=\sum_j f''(X(t_{j-1}^{(n)}))a(t_{j-1}^{(n)})^2(t_j^{(n)}-t_{j-1}^{(n)})
$$

を考えると、これは $f''(X(s))$ の連続性から $n\to\infty$ のとき

$$
\int_0^t f''(X(s))a(s)^2ds
$$

に収束する。あとは

$$
E\left[|II_{1,a}-III|^2\right]\to 0
$$

を示せば良い。これは直接計算でできる。

（一般の f, a, b の場合は，停止時刻を用いた議論をする．）