4.3 オプションの価格付けとヘッジ戦略

$$Z(t) = \exp\left\{-\frac{(\mu - r)}{\sigma}B(t) - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 t\right\} \tag{4.6}$$

とおくとこれは $\mathcal{F}_t^B$-マルチンゲールで， Girsanov の定理によりこのとき，

$$Q(A) = E\left[Z(T); A\right] \qquad A \in \mathcal{F}_T \tag{4.7}$$

はもとの確率 P と $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上で同値な確率測度となり，

$$W(t) = B(t) + \frac{\mu - r}{\sigma}t$$

は Q でみると Brown 運動となる．ところで，

$$d\tilde{S}(t) = (\mu - r)\tilde{S}(t)dt + \sigma\tilde{S}(t)dB(t) = \sigma\tilde{S}(t)dW(t) \tag{4.8}$$

となるので，$\tilde{S}(t)$ は Q でみると Brown 運動による確率積分で書けており，したがって $\mathcal{F}_t^B$-マルチンゲールになる[1]．これにより，$\tilde{V}(t)$ は Q で見ると $\mathcal{F}_T^B$-マルチンゲールになることがわかる．

一方，マルチンゲールの表現定理により $(\Omega, \mathcal{F}_T^B, Q)$ 上で，任意の $\mathcal{F}_T^B$-マルチンゲール $M(t)$ に対して $\mathcal{F}_T^B$-適合な確率過程 $\theta(t)$ がとれて

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \theta(s)dW(s)$$

となることが知られている．これを使うと，例えばヨーロピアンコールオプションについては

$$M(t) = E^Q\left[e^{-rT}(S_T - K)_+ \middle| \mathcal{F}_t^B\right]$$

というマルチンゲールは，ある $\mathcal{F}_t^B$-適合な確率過程 $\theta(t)$ によって

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \theta(s)dW(s) \qquad \forall t \in [0, T]$$

と表される．$M(t)$ と各時刻 t で割引現在価値 $\tilde{V}(t)$ が等しい self financing ポートフォリオ $(H^0(t), H(t))$ を作ろう．(**??**, 4.3) により，

$$H(t) = \frac{\theta(t)}{\sigma\tilde{S}(t)}$$

とおくと

$$\tilde{V}(t) = M(t) = M(0) + \int_0^t \sigma H(u)\tilde{S}(u)dW(u)$$

[1] $\sigma(W(s); s \le t) = \mathcal{F}_t^B$ であるのは，$W(t)$ と $B(t)$ がお互いに他方で表すことができるからわかる．

とかけ，命題 **??** により，このとき

$$V(t) = H^0(t)S^0(t) + H(t)S(t)$$

が成り立つので，これを解いて $H^0(t)$ を求めることができる．この戦略 $(H^0(t), H(t))$ に沿ってポートフォリオの組み換えをおこなうと，$\tilde{V}(T) = e^{-rT}(S(T)-K)_+$ つまり，

$$V(T) = (S(T)-K)_+$$

となり，満期時にヨーロピアンコールオプション $(S(T)-K)_+$ を実現する戦略が求まったことになる.（複製ポートフォリオの存在，ヘッジができた）一般にはオプションとは $\mathcal{F}_T^B$-可測な確率変数 $h(\omega)$ のことを言い，考えるべきマルチンゲールは

$$M(t) = E^*\left[e^{-rT}h \mid \mathcal{F}_t^B\right]$$

となる．オプション h の時刻 t での価格は $V(t)$ と等しくなくてはいけない．なぜなら，この価格を $C(t)$ と書くとき，時刻 t において $V(t) > C(t)$ であったとするとポートフォリオ $(H^0(t), H(t))$ を売り，代金 $V(t)$ を手に入れ、$C(t)$ でこのオプションを買うことができる．差額は安全資産として運用すると，満期 T では $C(T) = h$ となっているから $(H^0(T), H(T))$ と同じ価値になる．安全資産で運用した分儲けることになる．逆の場合は最初にオプションを売ることになる．したがって，

$$C(t) = V(t) = e^{rt}\tilde{V}(t) = e^{rt}E^Q\left[e^{-rT}h \mid \mathcal{F}_t\right]$$

($\tilde{V}(t)$ は Q で見ると $\mathcal{F}_t^B$-マルチンゲール）となりこのオプションの価格が決まる．最後に，ヨーロピアンコールオプションのとき、実際にこのオプションの価値 $C(t)$ およびこれをヘッジするための戦略を求めてみよう．

$$\tilde{V}(t) = e^Q\left[e^{-rT}(S(T)-K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] = e^Q\left[(\tilde{S}(T) - Ke^{-rT})_+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

であり，

$$d\tilde{S}(t) = \sigma\tilde{S}(t)dW(t)$$

なので，

$$\tilde{S}(T) = \tilde{S}(t)\exp\{\sigma(W(T)-W(t)) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\}$$

となる．$W(T) - W(t)$ は $\mathcal{F}_t$ と独立なので，

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t) &= E^Q\left[\left(\tilde{S}(t)\exp\{\sigma(W(T)-W(t)) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\} - Ke^{-rT}\right)_+\right] \\
&= e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)}\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y^2}{2} + \sigma y\sqrt{(}T-t)\}dy \\
&\quad -Ke^{-rT}\int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy
\end{aligned}$$

ただし

$$A = \{y \in \mathbf{R};\ y \geq \frac{\log \frac{K}{S(t)} - r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T-t}\}$$

となる．$A = \{y \geq -d_2\}$ と書く．このとき標準正規分布の分布関数を $\Phi(x)$ と書くとき，

$$\begin{aligned}
\tilde{V}(t) &= \tilde{S}(t)\int_{-d_2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{(y-\sigma\sqrt{T-t})^2}{2}\}dy - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\
&= \tilde{S}(t)\Phi(d_2 + \sigma\sqrt{T-t}) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) \\
&:= \tilde{S}(t)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2)
\end{aligned}$$

したがって，

$$V(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

となる．これが有名な Black-Scholes　の公式である．d_1, d_2 にでてくる $S(t)$ を x で置き換えたものを再び d_1, d_2 と書くとき，

$$F(t,x) = x\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2),$$

$$\tilde{F}(t,x) = e^{-rt}F(t, e^{rt}x)$$

とおくと、伊藤の公式により

$$\begin{aligned}
d\tilde{V}(t) &= d(e^{-rt}F(t,S(t))) = d(\tilde{F}(t,\tilde{S}(t))) \\
&= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}dt + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}d\tilde{S}(t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial x^2}\sigma^2\tilde{S}(t)dt
\end{aligned}$$

$\tilde{V}(t)$ がマルチンゲールであることから dt の部分はゼロになる．これより，$\tilde{S}(t)$ がマルチンゲールなので，

$$\tilde{V}(t) = V(0) + \int_0^t \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}d\tilde{S}(t)$$

self-financing な戦略として $H(t)$ を

$$H(t) = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x}(t, \tilde{S}(t))$$

と取ればよい．

$$V(t) = H^0(t)S^0(t) + H(t)S(t)$$

から $H^0(t)$ も決まることになる．