4 合成関数の微分・逆関数の微分

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が微分可能で、その合成関数 $f \circ g(x)$ または $g \circ f(x)$ が考えられるとき、これらの合成関数の微分を考えることができる。

定理 4.1 f および g が微分可能で、$f \circ g$ が定義されているとき、

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (f' \circ g)(x) \cdot g'(x)$$

が成り立つ。

例 4.1 $f(x) = x^{32}$ と $g(x) = 6x^2 + 2x - 1$ の合成関数 $f \circ g(x) = (6x^2 + 2x - 1)^{32}$ の微分を考える。これは、合成関数の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}(6x^2+2x-1)^{32} = 32(6x^2+2x-1)^{31} \cdot (12x+2) = 64(6x+1)(6x^2+2x-1)^{31}$$

と計算する。

例 4.2 $\sin(2x+1)$ の微分を考える。これは $f(x) = \sin x$ と $g(x) = 2x + 1$ の合成関数 $f \circ g(x)$ と思えるので、

$$f'(x) = \cos x \quad \text{だから} \quad f'(g(x)) = \cos(2x+1)$$

で、これに $g'(x) = (2x+1)' = 2$ をかけて、

$$\frac{d}{dx}\sin(2x+1) = \cos(2x+1) \cdot 2 = 2\cos(2x+1)$$

と計算すると良い。

定理の証明

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

なので、まず、$h \to 0$ のとき、

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x)$$

がわかる。一方、g は微分可能なので連続で、$h \to 0$ のとき、$g(x+h) \to g(x)$, つまり、$\varepsilon = g(x+h) - g(x)$ とおくと、 $g(x+h) = g(x) + \varepsilon$ とかけ、$h \to 0$ のとき $\varepsilon \to 0$ なので、

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(g(x)+\varepsilon) - f(g(x))}{\varepsilon} \\ &= f'(g(x)) = (f' \circ g)(x)\end{aligned}$$

□

定理 4.2 $f(x)$ が微分可能で、逆関数 $f^{-1}(x)$ を持てば、$f^{-1}(x)$ も微分可能で

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

証明 最初に f が連続なら f^{-1} も連続なことを示しておく。$f^{-1}(x) = y, f^{-1}(x+h) = y + \varepsilon$ とかき、$h \to 0$ のとき、$\varepsilon \to 0$ をいう。

$$f(y+\varepsilon) = f(f^{-1}(x+h)) = x + h \to x$$

なので、$y + \varepsilon \to y'$ ならば、f の連続性から $f(y+\varepsilon) \to f(y')$ だから、$f(y') = x$ でなくてはならない。f は 1 対 1 なので、$f(y) = x$ とあわせて $y' = y$ つまり $\varepsilon \to y' - y = 0$

次に $f^{-1}(x)$ の微分を考える。$f^{-1}(x) = y, f^{-1}(x+h) = y + \varepsilon$ とかくと、これらを f で写すと、

$$f(y) = f(f^{-1}(x)) = x, \quad f(y+\varepsilon) = f(f^{-1}(x+h)) = x + h$$

だから、$h \to 0$ のとき $\varepsilon = f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x) \to 0$ なので、

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(x+h) - f^{-1}(x)}{h} &= \frac{y + \varepsilon - y}{f(f^{-1}(x+h)) - f(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{\varepsilon}{f(y+\varepsilon) - f(y)} \\ &\to \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\end{aligned}$$

例 4.3 $f(x) = x^2$ （ただし定義域は $\{x > 0\}$）を考える。逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (ただし定義域は $\{x > 0\}$）なので、$f'(f^{-1}(x)) = 2f^{-1}(x) = 2\sqrt{x}$ となり、逆関数の公式から

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (\text{定義域は } \{x > 0\})$$

指数関数 e^x と対数関数 $\log x$ の微分

$f(x) = a^x$ のグラフは $a > 1$ のときは右上がり、$0 < a < 1$ のときは左上がりのグラフになっている。$x = 0$ での接線の傾きは a が連続に増加すると連続に増加している。$a \to \infty$ のとき、この傾きも ∞ に発散している。($a = 1$ のとき、グラフは $y = 1$ で水平だから $x = 0$ での接線の傾きは 0) したがって、どこかの $a > 1$ で、$y = a^x$ のグラフの $x = 0$ での接線の傾きが 1 になっている。

この様な a の値を e とかく。定義から

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \tag{1}$$

である。e は

$$e = 2.71828\ldots$$

となる無理数であることが知られている。さて、$f(x) = e^x$ の微分を考えてみる。(1) から、

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x e^h - e^x}{h} = e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x$$

つまり e^x を微分するとまた e^x がでてくる。

$$(e^x)' = e^x$$

次に e^x の逆関数を $\log x$ と書く。底は e であって 10 ではない。これを**自然対数**とよぶので、 $\ln x$ と書く流儀もある。いずれにしろ、大学の数学では自然対数を $\log x$ と書き、常用対数は $\log_{10} x$ と底を明示する。(常用対数よさようなら!)

逆関数の微分公式から

$$(\log x)' = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

がでてくる。

一般の指数関数の微分

一般の指数関数 $a^x \quad (a \neq 1, a > 0)$ を考えよう。

自然対数をとると

$$\log a^x = x\log a$$

なので、$f(x) = \log x, g(x) = a^x$ として、$a^x = (f\circ g)(x)$ と表せるので、その微分は合成関数の微分公式から

$$\frac{1}{g(x)}\cdot(a^x)' = \log a$$

が分かる。

$$左辺 = \frac{1}{a^x}(a^x)'$$

なので、これより $(a^x)' = a^x\log a$ が分かる。

対数をとってから微分する方法を**対数微分法**という。

例 4.4 (教科書 p.78 例題 3.25)

対数微分法を使うと次のような関数も微分できる。

$$f(x) = x^x \quad (x > 0)$$

実際、両辺の対数をとると $\log f(x) = x\log x$ で、左辺は $g(x) = \log x$ と $f(x)$ の合成関数 $g\circ f(x)$ とかけるので、微分すると

$$g'(f(x))\cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = x^{-x}f'(x)$$

となり、右辺を微分すると

$$\log x + x\cdot\frac{1}{x} = \log x + 1$$

なので、

$$x^{-x}f'(x) = \log x + 1$$

したがって、

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^x) = x^x(\log x + 1)$$

となる。

接線の方程式と微分係数

$y = f(x)$ のグラフの $x = a$ における接線は傾き $f'(a)$ で点 $(a, f(a)$ を通るので、

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

で与えられる。

例 4.5 $y = e^x\sin x$ の $x = 0$ での接線の方程式を求める。

$f(x) = e^x\sin x$ の導関数は積の微分公式から

$$(e^x)'\sin x + e^x(\sin x)' = e^x(\sin x + \cos x)$$

なので、$x = 0$ での接線の傾きはこれに $x = 0$ を代入して 1 となるので、

$$y = 1\cdot(x-0) + 1\cdot 0 = x$$

練習 4.1 (教科書 p.73 問 3.25)

次の関数を微分せよ。

(1) $y = \sin(3x-2)$ (2)$y = \cos(x^3)$ (3) $y = \sin^3 x$ (4) $y = \dfrac{1}{1+\sin x}$

練習 4.2 (教科書 p.77 問 3.28)

次の関数を微分せよ。

(1) $y = e^{-x}$ (2)$y = (\log x)^2$ (3)$y = \dfrac{\log x}{x}$

練習 4.3 (教科書 p.78 問 3.29、 問 3.30 (1))

次の関数 $f(x)$ について対数微分法によって導関数を求めよ。$x > 0$ とする。

(1) $f(x) = x^\alpha$ (α は定数) (2) $f(x) = x^{1/x}$