5　関数の増減と極値

定理 5.1 (教科書 p.56 定理 3.3)
$a < b$ を実数とするとき、閉区間 $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$ の各点で連続な関数は必ずこの区間内に最大値と最小値をとる点をもつ

この定理は直観的には明らかだが、証明しようとすると実数の性質に踏み込むので、この講義では証明せずに認める。

定理 5.2 (Rolle の定理 : 教科書 p.82 定理 3.14)
関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で、$a < x < b$ となる各点 x で微分可能なとき、 $f(a) = f(b)$ ならば、$f'(c) = 0$ および $a < c < b$ をみたす点 c が必ずある。

証明　とにかく $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続なので、定理 5.1 により、この区間で最大値と最小値をとる。このどちらも $f(a) = f(b)$ と等しいなら、この区間で $f(x)$ は定数となり、このとき $a < x < b$ となるどの点ででも

$$f'(x) = 0$$

となるので、定理は正しい。どちらかが $f(a)$ と違うとして良い。どちらでも議論は同じように出来るので、 最大値が $f(a) = f(b)$ より大きいとする。最大値をとる点を c とすると、

$$f(c) > f(a) = f(b)$$

$c \neq a, b$ つまり $a < c < b$ したがって仮定より $f'(c)$ がある。
そこで、$f'(c) = 0$ を示せば定理は証明できる。$f(c)$ が最大値なので、任意の $h > 0$ に対して $a < c - h < c + h < b$ のとき

$$f(c+h) - f(c) \leq 0, \quad f(c-h) - f(c) \leq 0$$

これより、

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

ここで、 $h \to 0$ $(h > 0)$ とすると、

$$f'(c) \leq 0, \quad \text{かつ} \quad f'(c) \geq 0$$

となり、 $f'(c) = 0$ がわかる。 □

定理 5.3 (平均値の定理 : 教科書 p.81 定理 3.13)
閉区間 $[a, b]$ で連続で、$a < x < b$ となる任意の x で微分可能な関数 $f(x)$ について、$a < c < b$ となる c で

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

を満たすものがある。

証明

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

とおくと、$g(b) = g(a) = f(a)$ なので、Rolle の定理から $g'(c) = 0$ となる c が $a < c < b$ を満たすように見つかる。ところが

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

だからこの c が求めるもの。 □

平均値の定理から次のことが分かる。 $f(x)$ は微分可能としておく。

1. $a < x < b$ で $f'(x) > 0$ ならば、$f(x)$ はこの区間で単調増加
   なぜなら、$a < x < y < b$ のとき、平均値の定理で $x < c < y$ となる c で、
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) > 0$$
   となるので、これは $f(x) < f(y)$ を意味している。
2. $a < x < b$ で $f'(x) < 0$ ならばこの区間で $f(x)$ は単調減少
   なぜなら、$a < x < y < b$ のとき、平均値の定理で $x < c < y$ となる c で、
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c) < 0$$
   となるので、これは $f(x) > f(y)$ を意味している。
3. $a < c < b$ となる点 c で $f(x)$ が最大値または最小値をもてば、$f'(c) = 0$
   証明は Rolle の定理の証明と同じ。

極大、極小区間 $[a, b]$ で f' の符号が点 c の近くで正から負に変わる時、関数 f は増加から減少に変わるので、c のごく近い区間では $f(c)$ は最大になる。だが、全体の区間 $[a, b]$ では最大値でも最小値でもないこともある。とにかく、この様にその点のごく近くをみると、$f(x)$ が最大または最小になるとき、この点での f の値を f の**極値**という。上の 3. から極値をとる点では f' の値は 0 になる。その点の近くで最大値となる極値を**極大値**、最小値となる極値を**極小値**と呼ぶ。
関数の凹凸と２階導関数 $f''(x)$ がある区間で正なら $f'(x)$ は上のことからこの区間で単調増加になり、$y = f(x)$ のグラフは下に凸になる。$f''(x)$ がこの区間で負ならば $f'(x)$ は単調減少で、$y = f(x)$ のグラフは上に凸（下に凹）という。$f''(x)$ の符号が入れ替わる点では関数の凹凸が入れ替わり、この様な点を**変曲点**という。変曲点では $f''(x) = 0$ となっている。

例 5.1 (教科書 p.87 問 3.35) $f(x) = \cos x + x \sin x$ の増減と凹凸を $0 \le x \le \pi$ で調べよう。

$$f'(x) = -\sin x + \sin x + x\cos x = x \cos x$$

また

$$f''(x) = \cos x - x \sin x$$

なので、極値は $x = 0, \frac{\pi}{2}$ でとる。

$$f''(0) = 1 > 0, \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

より、$x = 0$ では極小値 1、$x = \frac{\pi}{2}$ では極大値 $\frac{\pi}{2}$ をとっている。増減と凹凸は x^* を $\tan x = 1/x$ の $0 < x < 1$ における唯一つの解とすると、

x	0	$\dots$	x^*	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$	$\dots$	π
$f'(x)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-\pi$
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	-1
$f(x)$	1	$\nearrow$	変曲点	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1

例 5.2 (参考：教科書 p.108 練習問題 3.7(2))

関数

$$y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

の極値と凹凸を調べよう。上式右辺を $f(x)$ と書いて、導関数は商の微分公式により、

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x-1)^2(x+1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

もう一度微分すると、商の微分公式により、

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)\cdot 2x \cdot (x^4-3x^2)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1) - 4x(x^4-3x^2)}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^2(x+1)^2} \end{aligned}$$

増減表を書くと

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$-$	$-\infty$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$\pm\infty$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

極大値は $x = -\sqrt{3}$ のとき $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であり、極小値は $x = \sqrt{3}$ のとき $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ となる。また、$x = 0$ が変曲点であり、そのときの f の値は 0 となっている。

普通は、分数関数の微分は間違いやすいので、

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2-1} = x + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right\}$$

としてから、微分を始めることが多い。ただ、これで 2 階微分の零点を見付けるためにはかえって良くないこともあるので、いずれにしろ商の微分は注意深くやる必要がある。

練習 5.1 (教科書 p.90 問 3.38(1), p.94 問 3.40(2))

(1)$y = -x^4 + x^2 - 1$ の極値と凹凸を調べグラフの概形を描け。

(2)$y = x^2 e^{-x}$ の極値と凹凸を調べグラフの概形を描け。