

## 7 不定積分

これまでに勉強したいろいろな関数の微分について表を作っておこう。

$f(x)$ (もとの関数)	$f'(x)$ (微分した関数)	備考
$x^n$	$nx^{n-1}$	$n$ :自然数
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha$ は実数
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	商の微分
$e^x$	$e^x$	
$e^{-x}$	$-e^{-x}$	
$\log x$	$\frac{1}{x}$	
$f(x)g(x)$	$f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	積の微分
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$	$g(x) \neq 0$ : 商の微分
$f(g(x))$	$f'(g(x))g'(x)$	合成関数の微分

**原始関数** 関数  $f(x)$  に対して、ある関数  $F(x)$  が、その導関数  $F'(x)$  が  $f(x)$  と一致する、つまり

$$F'(x) = f(x)$$

となるとき、 $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数という。

**注意 7.1** 原始関数は一つとは限らない。たとえば、 $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 3$ ,  $F_2(x) = \frac{x^2}{2}$  はともに  $f(x) = x$  の原始関数となる。

原始関数の一般形を不定積分という。

**定理 7.1** 二つの関数  $F_1(x), F_2(x)$  がともに  $f(x)$  の原始関数ならば

$$F_1(x) - F_2(x) = \text{一定}$$

となる

**証明** 簡単のため、 $F_1(x), F_2(x)$  は実数全体で定義されており、ともに  $f(x)$  の導関数とする。このとき、

$$(F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$$

なので、平均値の定理から  $x \neq 0$  のとき、 $0$  と  $x$  の間の  $c$  があって、

$$(F_1(x) - F_2(x)) - (F_1(0) - F_2(0)) = (F_1 - F_2)'(c)(x - 0) = (f(c) - f(c)) \cdot x = 0$$

となるので、 $F_1(x) - F_2(x)$  は  $x$  によらず一定になる。□  
したがって、 $F(x)$  が  $f(x)$  の一つの原始関数であるとき、その不定積分は

$$F(x) + C \quad (C \text{ は (積分) 定数})$$

とかけ、これを

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad (C \text{ は (積分) 定数})$$

と表す。微分の関係から不定積分はつぎの関係を満たす。

**定理 7.2** 実数  $a, b$  に対して、

$$\int (af(x) + bg(x)) dx = a \int f(x) dx + b \int g(x) dx$$

上の表をもとに、いろいろな関数の不定積分を求めてみよう。

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

だから、 $\alpha$  の代わりに  $\alpha + 1$  をつかうと

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha + 1)x^\alpha$$

したがって、 $\alpha + 1 \neq 0$  のとき、両辺を  $\alpha + 1$  でわって

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$$

つまり、 $\alpha \neq -1$  のとき、

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

$\alpha = -1$  のときはどうだろう。上の表で微分が  $x^{-1}$  となるものを探すと、 $\log x$  がある。したがって、 $x > 0$  のとき

$$\int x^{-1} dx = \log x + C$$

がわかる。 $x < 0$  のとき、 $\log(-x)$  を微分すると、合成関数の微分だから

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

まとめると、

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \text{ のとき} \\ \log|x| + C, & \alpha = -1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。同様に

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x + C \\ \int e^x \, dx &= e^x + C \\ \int e^{-x} \, dx &= -e^{-x} + C\end{aligned}$$

などがわかる。

**定積分** 区間  $[a, b] = \{x : a \leq x \leq b\}$  で  $f(x)$  を考える。 $f(x)$  がこの区間で正のとき、 $\{x = a\}, \{x = b\}$  と  $x$  軸と  $y = f(x)$  とでかこまれた図形の面積を

$$\int_a^b f(x) \, dx$$

とかく。 $f(x)$  が負の値もとるときは、この式は  $f(x) > 0$  となる部分の面積から  $f(x) < 0$  となる部分の面積を引いたものとして定義される。また、

$$\int_b^a f(x) \, dx = -\int_a^b f(x) \, dx$$

と約束しておく。このとき、

$$\int_a^{b+h} f(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx = \int_b^{b+h} f(x) \, dx$$

となるが、右辺は  $f(x)$  が連続ならば  $h > 0$  が小さいとき  $f(b)h$  にほぼ等しく、したがって両辺を  $h$  でわって、 $h \rightarrow 0$  とすると、

$$\frac{1}{h} \left( \int_a^{b+h} f(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx \right) \rightarrow f(b)$$

となる。変数をかきかえて、

$$\frac{1}{h} \left( \int_a^{x+h} f(t) \, dt - \int_a^x f(t) \, dt \right) \rightarrow f(x)$$

とかけ、 $\int_a^x f(t) \, dt$  は  $f(x)$  の原始関数になっている。したがって、 $f(x)$  のひとつの原始関数を  $F(x)$  とかくと、

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) + C$$

とかける。 $x = a$  のとき、左辺の面積は 0 だから、

$$F(a) + C = 0 \quad \therefore C = -F(a)$$

がわかり、

$$\int_a^x f(t) \, dt = F(x) - F(a)$$

という式がでてくる。面積は原始関数を使って表すことができる。(微分積分学の基本定理)

**練習 7.1** 次の不定積分を求めよ

- (1)  $\int (x^3 + 4x^2 - 2x + 3) \, dx$
- (2)  $\int (\sin x + 3e^x) \, dx$
- (3)  $\int \sqrt{x} \, dx$
- (4)  $\int \frac{1}{x^4} \, dx$
- (5)  $\int \frac{2x - 5}{x^2 - 5x + 3} \, dx$
- (6)  $\int \tan x \, dx$

**練習 7.2** 次の定積分を求めよ。

- (1)  $\int_0^1 (x^3 - 2x + 2) \, dx$
- (2)  $\int_{-1}^0 (x + 1)^3 \, dx$
- (3)  $\int_0^\pi (\sin x - 2 \cos x) \, dx$
- (4)  $\int_0^2 e^{3x} \, dx$
- (5)  $\int_1^5 \left( \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) \, dx$
- (6)  $\int_{-1}^1 \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \, dx$