11 多変数の関数とそのグラフ

前節の回転体の体積は

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

と、楕円の縦軸の長さ $2b$ と横軸の長さ $2a$ を使って表される。これは a と b の関数と見る事が出来る。この様に、我々の身の回りにある量は、多くの場合、二つ以上の変数を含む関数になっている。例として 2 変数の関数

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad と \quad f(x,y) = x^2 - y^2$$

を考えてみよう。この二つの関数を $D = \{(x,y)\,;\, 0 \le x, y \le 1\}$ で考えてみる。z 軸に $f(x,y)$ の値をプロットすると空間の中のなめらかな曲面 $z = f(x,y)$ が得られる。なかなか式を見ただけでは想像しにくい曲面であろう。

定義 11.1 2 変数の関数 $f(x,y)$ が 点 (x_0,y_0) で連続であるとは、$x \to x_0, y \to y_0$ が同時に成り立つ時

$$f(x,y) \to f(x_0,y_0)$$

が常に成り立つ時に言う。

例 11.1 (教科書 p.167 例題 5.2)

次の関数は 点 $(0,0)$ で連続か？

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

解 $y = 0$ のとき、つまり、(x,y) が x 軸上を $(0,0)$ に近づく時、

$$f(x,0) = 0 = f(0,0)$$

一方、$y \ne 0$ のときは分母分子を y^2 で割って、

$$|f(x,y)| = \frac{|y|}{1 + (x/y)^2} \le |y| \to 0 = f(0,0)$$

となり、確かに $f(x,y)$ は点 $(0,0)$ で連続になる。

連続な関数のグラフはやはりつながっている。

練習 11.1 $z = xy$ のグラフの等高線をかけ。$z = 3, z = 5$ の二つの等高線をかけ。さらに、$y = 2$ における切口の方程式を求めよ。$y = x$ における切口の方程式も求めよ。この関数が、$(0,0)$ で連続である事を示せ。

12 偏微分

$f(x,y)$ の値が、x の変化にどのように反応して変化するか、y の変化にはどのように反応するかを知りたい事は良くある。x と y 両方を動かすと影響が見えにくいので、片方をとめて議論するとよい。偏微分もそのような考え方による。

y をいま $y = y_0$ と固定して、x だけを $x = x_0$ から少し変化した時、$f(x,y)$ がどのように変化するかは

$$\Delta f(x_0,y_0) = f(x,y_0) - f(x_0,y_0)$$

で与えられる。これが $x - x_0$ とどのような比になるかをみてみると、 x 方向の平均変化率

$$\frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0}$$

で与えられる。ここで、 $x \to x_0$ としたとき、この比の値が何かある値 A に近づく時、つまり、

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0,y_0)}{h} = A$$

となるとき、 $f(x,y)$ は 点 (x_0,y_0) で**微分可能**であると言い、このとき、極限の値 A のことを $f(x,y)$ の点 (x_0,y_0) での x 方向の**偏微分係数** といい、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \quad または \ f_x(x_0,y_0)$$

とかく。これは、実際には $f(x,y_0)$ という x の関数を x について微分するだけの事である。

記号 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ は、

1. y を定数と思う。
2. x の関数と思って普通に微分する。

の二つの事をやることを要求する記号である。

例 12.1 $f(x,y) = x^2 - y^2$ の点 $(2,2)$ における x 方向の偏微分係数を求めてみる。

$$f(x,2) = x^2 - 4$$

だから、この $x = 2$ における微分係数を求めればよく、したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 4$$

同様に、この点における y 方向の微分係数は、

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = -4$$

となる。

いちいち $(2,2)$ を代入しないで、まっすぐ $f(x,y)=x^2-y^2$ を偏微分してみよう。x で偏微分する時は y は定数扱いするので、y^2 を x で偏微分すると、0 になり、 x^2 を x で偏微分するのは普通の微分と同じだから、 $2x$ となる。したがって、結果として、

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x} = 2x$$

y で偏微分すると、

$$\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y} = -2y$$

と計算でき、最後に、 $(x,y)=(2,2)$ を代入すれば良い。

例えば、

$$\frac{\partial\sqrt{x^2+y^2}}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

と計算すれば良い。

例 12.2 次の関数を偏微分せよ。また、点 $(2,1)$ における偏微分係数を求めよ。

(1) $f(x,y)=x^3+x^2y-y^2$ (2) $f(x,y)=\log(x^2-y)$

(1) の解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2+2xy+0 = 3x^2+2xy,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0+x^2-2y = x^2-2y\end{aligned}$$

したがって、点 $(2,1)$ における偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 12+4=16, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 4-2=2$$

(2) の解：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{x^2-y}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2-y},\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x^2-y}\cdot(-1) = -\frac{1}{x^2-y}\end{aligned}$$

したがって、点 $(2,1)$ における偏微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{4}{4-1} = \frac{4}{3}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = -\frac{1}{4-1} = -\frac{1}{3}$$

変数が 3 以上の時も、考え方は同じで、

> $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ は
>
> - x_1 以外の変数はみな定数として扱う。
> - x_1 については普通に微分する。

という約束で計算すれば良い。

例 12.3 $f(x,y,z)=(x^2+y^2)e^{xz}$ に対して x で偏微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xe^{xz}+z(x^2+y^2)e^{xz} = (2x+z(x^2+y^2))e^{xz}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2ye^{xz}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x(x^2+y^2)e^{xz}\end{aligned}$$

と計算する。

練習 12.1 (教科書 p.170 問 5.3 (1),(2))
次の関数を x と y で偏微分せよ

(1) $f(x,y)=4x^3y-6x^2y^4$

(2) $f(x,y)=\log(2x-5y)$