13 高次の偏微分と Taylor の定理

関数 $f(x,y)$ を偏微分して偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ や $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ を得たように、さらにこれらを微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)
\end{aligned}
$$

などが考えられる。関数 f が良い関数の時は

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

である事が知られている。我々はあまり気にしないで、これが成り立っているものとして話を進める。(例えば、上のどちらかの関数が連続ならば良い事が知られている。)

例 13.1 (教科書 p.184 問 5.10 (1)) $f(x,y) = -2x^4y^3 + 5y^2$ の 2 次の偏導関数をすべて求めよ。

解

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -8x^3y^3\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -6x^4y^2 + 10y
\end{aligned}
$$

なので、この二つをもう一度微分して

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(-8x^3y^3) = -24x^2y^3\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(-6x^4y^2 + 10y) = -24x^3y^2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(-8x^3y^3) = -24x^3y^2\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(-6x^4y^2 + 10y) = -12x^4y + 10
\end{aligned}
$$

定理 13.1 (2 変数の Taylor の定理) $f(x,y)$ が連続な 2 次までの偏微分係数をもてば、

$$
\begin{aligned}
f(a+h, b+k) &= f(a.b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))
\end{aligned}
$$

となる θ が $0 \le \theta \le 1$ を満たすようにとれる。

証明は省略する。最後の項は f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} でかくと、

$$\frac{1}{2}\left(h^2 f_{xx} + 2hk f_{xy} + k^2 f_{yy}\right)(a+\theta(x-a), b+\theta(y-b))$$

とも書ける。

合成関数の微分・偏微分

定理 13.2 (i) $f(x,y)$ が十分滑らかな時、$x(t), y(t)$ が t について微分可能ならば、$f(x(t), y(t))$ も t について微分可能で、

$$\frac{d}{dt}f(x(t),y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}$$

(ii) $f(x,y)$ が十分滑らかな時、$x = x(u,v), y = y(u,v)$ が u, v について偏微分可能ならば、$h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ は u, v について偏微分可能で、

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x(u,v)}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\\
\frac{\partial h}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x(u,v)}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}
\end{aligned}
$$

証明 どれも証明の方法は同じなので、一つだけ証明する。いろいろ証明の方法はあるが、ここでは Taylor の定理を使う。

$$
\begin{aligned}
& f(x(u+h,v), y(u+h,v)) - f(x(u,v),y(u,v))\\
=\ & (x(u+h,v) - x(u.v))\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\\
& +(y(u+h) - y(u,v))\frac{\partial f}{\partial y}((x(u,v),y(u,v))\\
& +\frac{1}{2}\Big[(x(u+h,v) - x(u,v))^2 f_{xx}(c_1,c_2)\\
& +2(x(u+h,v) - x(u,v))(y(u+h,v) - y(u,v))f_{xy}(c_1,c_2)\\
& +(y(u+h,v) - y(u,v))^2 f_{yy}(c_1,c_2)\Big]
\end{aligned}
$$

(c_1, c_2) は $x(u,v), y(u,v$ と $(x(u+h,v), y(u+h,v))$ の間。

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{x(u+h,v) - x(u,v)}{h} &= \frac{\partial x}{\partial u},\\
\lim_{h\to 0}\frac{y(u+h,v) - y(u,v)}{h} &= \frac{\partial y}{\partial u}
\end{aligned}
$$

なので、第 3 項は h^2 でわって有限な極限に行く。だから h で割ったら 0 に近づく。第 1 項、第 2 項は h で割って、$h \to 0$ とするとき、

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}$$

と
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v))\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}$$
に近づく。

例 13.2

$$f(u,v)=\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2},\quad u(x,y)=e^{-x-y},\ v(x,y)=e^{xy}$$

のとき、$F(x,y)=f(u(x,y),v(x,y))$ に対して $\frac{\partial F}{\partial x}$ を求める。

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
だから、それぞれを計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\\ &= \frac{2u(u^2-v^2)-2u(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}\\ &= -\frac{4uv^2}{(u^2+v^2)^2}\end{aligned}$$

$u=e^{-x-y}, v=e^{xy}$ を代入すると、

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))=-\frac{4e^{2xy-x-y}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}\\ &= \frac{2v(u^2-v^2)+2v(u^2+v^2)}{(u^2+v^2)^2}\\ &= \frac{4vu^2}{(u^2+v^2)^2}\end{aligned}$$

$u=e^{-x-y}, v=e^{xy}$ を代入すると、

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))=\frac{4e^{xy-2x-2y}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}$$

また、
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-e^{-x-y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=ye^{xy}$$
だから、これらを代入して、

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{4(1+y)e^{2(xy-x-y)}}{(e^{-2x-2y}-e^{2xy})^2}$$

練習 13.1 $f(x,y)=xy(x+y)$ のとき、$x(t)=\cos t, y(t)=\sin t$ のときの $h(t)=f(x(t),y(t))$ について、$\dfrac{dh(t)}{dt}$ を求めよ。

練習 13.2 次の関数を x,y でそれぞれ偏微分せよ。

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+xy+y^2}$

(2) $f(x,y)=\dfrac{3x-y}{x+2y}$