練習 3.1, 練習 3.2 の解答

練習 3.1 (1) ここでは f' のかわりに $\frac{d}{dx}f$ を使います。微分する関数 f の形が複雑なときはこのほうが便利です。

積の微分の公式から、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^3-4)(x^2+2) &= 3x^2(x^2+2)+(x^3-4)\cdot 2x \\ &= 3x^4+6x^2+2x^4-8x \\ &= 5x^4+6x^2-8x \end{aligned}$$

講評　良くできていました。中に、せっかく正解を出しながら、そのあとに何故かもう一回微分してしまった可哀想な人がいました。

(2) 商の微分の公式により、

$$\frac{d}{dx}\frac{x+1}{2x-3} = \frac{2x-3-2(x+1)}{(2x-1)^2} = -\frac{5}{(2x-3)^2}$$

講評　これも良くできていました。$-(2x+1) = -2x+2$ とうっかりしてしまった人がいました。(　) を外すときは注意しましょう。

練習 3.2 (1)

$$\begin{aligned} (\cos x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{2\sin(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \\ &= -\lim_{\varepsilon\to 0}\sin(x+\varepsilon)\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \\ &= -\sin x\cdot 1 = -\sin x \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

講評　これも良くできていました。、ただ、気になるのは、まだ極限の計算をする時に $\lim_{h\to 0}$ を前につけずに等式で変形している人が何人かあることです。等式は等号 “=” の両辺が等しいという意味ですから

$$-\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

はおかしいですよね。これは正しくは

$$-\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to -\sin x \quad (h\to 0)$$

または

$$-\lim_{h\to 0}\sin(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x$$

と書かなくてはいけません。