練習 5.1 の解答

練習 5.1

(1) $f(x)=-x^4+x^2-1$ の極値と凹凸を調べる

$$f'(x)=-4x^3+2x=2x(-2x^2+1)$$

$f'(x)=0$ となるのは $x=0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. また、

$$f''(x)=-12x^2+2$$

より、これが 0 となるのは $x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$. 以上より、増減表をかくと、

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	0	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	−	−	−
$f(x)$	↗	極大		↘		極小		↗		極大	↘
凹凸		上に凸		変曲点		下に凸		変曲点		上に凸	

極大値は $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ で $-\frac{3}{4}$ をとり、極小値は $x=0$ で -1 をとる。変曲点は $x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ で、このときの f の値は $-\frac{31}{36}$ となる。

グラフは省略

講評　良くできています。上に凸、下に凸まで注意してグラフを描くと、グラフがきれいになります。

(2) $f(x)=x^2e^{-x}$ について増減と凹凸を調べる。

$$f'(x)=(2x-x^2)e^{-x}$$

これが 0 になるのは $x=0,2$. また、

$$f''(x)=(2-2x-(2x-x^2))e^{-x}=(x^2-4x+2)e^{-x}$$

これが 0 になるのは $x=2\pm\sqrt{2}$ したがって増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0		+		0		−	
$f''(x)$		+		0		−		0	−
$f(x)$	↘	極小		↗		極大		↘	
凹凸		下に凸		変曲点		上に凸		変曲点	下に凸

となる。極大値は $x=2$ で $4e^{-2}$ をとり、極小値は $x=0$ で 0 をとる。変曲点は $x=2\pm\sqrt{2}$ で $(2\pm\sqrt{2})^2e^{-(2\pm\sqrt{2})}$ をとる。

グラフは省略

講評　多くの人が $x\to\infty$ のとき、$x^2e^{-x}\to 0$ となること、$x\to-\infty$ のとき、$x^2e^{-x}\to\infty$ となることをちゃんと確かめていました。知っておくと良いですね。

「二つの変曲点はどちらが大きいのですか？」

という質問がありました。うーん。鋭い質問ですね。一般にはこの様な問題に答えを出すには数値を代入して確かめるしかないことも多いです。今はたまたまですが、次のように調べることが出来ます。

二つの変曲点の値の差をとってみましょう。

$$(2+\sqrt{2})^2e^{-2-\sqrt{2}}-(2-\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}}$$

とかけます。$f(t)=(2+t)^2e^{-t}-(2-t)^2e^t$ とおくと、この差は $e^{-2}f(\sqrt{2})$ と表すことが出来ます。この値の符号を問題にします。

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 2(2+t)e^{-t}-(2+t)^2e^{-t}-\left(-2(2-t)e^t+(2-t)^2e^t\right)\\
&= (2+t)(2-2-t)e^{-t}-(2-t)(-2+2-t)e^t\\
&= t\left(-(2+t)e^{-t}+(2-t)e^t\right)\\
&= te^t\left(2-t-(2+t)e^{-2t}\right)
\end{aligned}$$

とかいて、f' の符号には $te^t>0$ は関係が無いので、

$$g(t)=2-t-(2+t)e^{-2t}$$

の符号を問題にしましょう。

$$g'(t)=-1-e^{-2t}+2(2+t)e^{-2t}=-1+(3+2t)e^{-2t}=e^{-2t}(-e^{2t}+3+2t)$$

$h(t)=-e^{2t}+3+2t$ とおくと、

$$h'(t)=-2e^{2t}+2\le 0\quad(t\ge 0)$$

なので、$h(t)$ は $t\ge 0$ で単調減少。$h(0)=3-1=2>0, h(3)=-2e^6+9<0$ だから、ある $0<c<3$ があって、

$$0<t<c\ \text{のとき}\ h(t)>0,\quad c<t\ \text{のとき}\ h(t)<0$$

となっています。これより、$g'(t)=e^{2t}h(t)$ についても

$$0<t<c\ \text{のとき}\ g'(t)>0,\quad c<t\ \text{のとき}\ g'(t)<0$$

$g(0)=0$ だから、g は c までは 0 以上で、最大値 $g(c)>0$ をとり、それから先は単調に減少します。$g(2)=-4e^{-4}<0$ だから、$c<2$ であり、ある $c<d<2$ となる d で $g(d)=0$ をとることになります。したがって、g の符号は

$$0<t<d\ \text{のとき}\ g(t)>0,\quad d<t\ \text{のとき}\ g(t)<0$$

がわかります。したがって、$f'(t)=te^tg(t)$ の符号も

$$0<t<d\ \text{のとき}\ f'(t)>0,\quad d<t\ \text{のとき}\ f'(t)<0$$

となり、$f(0)=0$ だから f も最初は単調増加して正の値をとり、d 以後単調減少していきます。したがって、f の符号は、ある点を境に正から負に変わります。

$$f(2)=4^2e^{-2}>0$$

だから、このことは $f(t)>0$ が $0<t\leq 2$ で成り立っていることを示しており、したがって、

$$0<e^{-2}f(\sqrt{2})=(2+\sqrt{2})^2e^{-2-\sqrt{2}}-(2-\sqrt{2})^2e^{-2+\sqrt{2}}$$

となるわけです。$2+\sqrt{2}$ の変曲点の値が $2-\sqrt{2}$ の変曲点の値より大きいことが分かりました。