1.4 マルチンゲール

いよいよ離散時間のマルチンゲールを定義する。本講義の中心的な話題である。マルチンゲールとは、もともと馬につける鼻輪のようなものだと言う説明を聞いたことがある。どうしてそのように名前をつけたかピント来ないのであるが、とにかくこの名前は既に確定している。定義から始めよう。以下ではフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P; \{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0})$ を固定しておく。

定義 1.10 確率過程 $\mathbf{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$- マルチンゲール (martingale) であるとは、

(i) $\mathbf{M}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-適合である。

(ii) 任意の $n \geq 0$ に対して、M_n は可積分で、

$$E[M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n \quad a.e. \tag{1.6}$$

の 2 条件を満たすことを言う。

上の定義で、(1.6) の等号を不等号"$\leq$" で代えたものを $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲール (supermartingale)、不等号 "$\geq$" で代えたものを $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲール (submartingale) という。

補題 1.10 確率過程 $\mathbf{M} = \{M_n\}_{n\geq 0}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$- マルチンゲールであることと、$\mathbf{M}$ が上の (i) と次の (iii) を満たすこととは同値である。

(iii) 任意の $n \geq 0$ に対して、M_n は可積分で、 $m \geq n \geq 0$ のとき、

$$E[M_m \mid \mathcal{F}_n] = M_n \quad a.e. \tag{1.7}$$

証明 (1.6) から (1.7) を示せば良い。$m = n + k$ と書いて k に関する帰納法で示す。$k = 1$ の時が (1.6) なので、k まで正しいとして tower property から

$$\begin{aligned} E[M_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n] &= E\big[E[M_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_{n+k}]\big|\mathcal{F}_n\big] \\ &= E[M_{n+k} \mid \mathcal{F}_n] \quad (\because n+k \text{ に (1.6) を使う}) \\ &= M_n \quad (\because \text{ 帰納法の仮定より}) \qquad \square \end{aligned}$$

これも等号を不等号に代えることで、優マルチンゲール、劣マルチンゲールに対しても同様のことが成り立つ。

注意 1.11 マルチンゲールは優マルチンゲールであり、劣マルチンゲールである。また、$\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールならば $\{-X_n\}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-優マルチンゲールとなるので、マルチンゲールに関する多くの主張は劣マルチンゲールに対して成り立てば、証明できることになる。

定義 1.11 $\{\mathcal{F}_n\}$-適合な確率過程 $\{X_n\}$ が $\{\mathcal{F}_n\}$-**可予測**とは、任意の $n \geq 1$ に対して X_n が $\mathcal{F}_{n-1}$-可測なことをいう。

劣マルチンゲールはマルチンゲールと 単調増加な可予測過程に一意的に分解が出来る。

定理 1.12 (Doob 分解)

$\{X_n\}$ を $\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとするとき、$\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール $\{M_n\}$ と、$A_0 = 0$ を満たす $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測な単調増加確率過程 $\{A_n\}$ が存在して、任意の $n \geq 0$ に対して

$$X_n = M_n + A_n \quad a.e.$$

と分解できる。この分解は一意的である。つまり、

$$X_n = N_n + B_n \quad a.e. \quad \forall n \geq 0$$

と分解できる $\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール $\{N_n\}$ と $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測な単調増加確率過程 $\{B_n\}$ があるとすると、

$$M_n = N_n \ a.e, A_n = B_n \quad a.e. \quad \forall n \geq 0$$

証明

$$X_k - X_{k-1} = X_k - E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] + E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}$$

として、両辺を $1 \leq k \leq n$ について和をとると

$$X_n - X_0 = \sum_{k=1}^{n}\big(X_k - E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]\big) + \sum_{k=1}^{n}\big(E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}\big)$$

となる。

$$M_n := X_0 + \sum_{k=1}^{n}\big(X_k - E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}]\big),$$

$$A_n := \sum_{k=1}^{n}\big(E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1}\big)$$

とおくと、

$$E[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$$

および X_n の劣マルチンゲール性より

$$A_n - A_{n-1} = E[X_k \mid \mathcal{F}_{k-1}] - X_{k-1} \geq 0$$

が成り立つので、M_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールで、A_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-可予測で単調増加。

最後に一意性を証明しよう。

$$X_n = M_n + A_n = N_n + B_n \quad a.e.$$

とする。移項して

$$M_n - N_n = B_n - A_n \quad a.e.$$

右辺は可予測なので $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測で、左辺の $\mathcal{F}_{n-1}$ での条件付き期待値をとっても変化しないことから、

$$M_n - N_n = E[M_n - N_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} - N_{n-1} \quad a.e.$$

が任意の $ngeq1$ で成り立つ。これより、

$$M_n - N_n = M_0 - N_0 = B_0 - A_0 = 0 \quad a.e.$$

となり、$M_n = N_n \quad a.e.$ がでてくる。したがって $A_n = B_n \quad a.e.$ も出てくる。 □

例 1.5 $\xi_1, \xi_2, \dots$ が平均 0 の独立確率変数列とするとき、

$$\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_j : 1 \leq j \leq n\}$$

とおくと、

$$S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$$

は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールになる。実際、

$$E[S_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = S_{n-1} + E[\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]$$

となるが、ξ_n と $\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ は独立なので、

$$E[\xi_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = E[\xi_n] = 0$$

となり、S_n は $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲール。

注意 1.13 X が可積分確率変数で、$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とするとき、X と $\mathcal{G}$ が独立のとき、任意の $A \in \mathcal{G}$ に対して

$$E[X : A] = \int_A X(\omega) P(d\omega) = E[X]P(A)$$

が成り立っている。右辺を

$$\int_A E[X] P(d\omega)$$

とかくと、$E[X]$ は定数なので 、$\mathcal{G}$-可測だから、条件付き期待値の条件を満たしており、

$$E[X \mid \mathcal{G}] = E[X] \quad a.e.$$

が成り立つ。

例 1.6 $\{M_n\}$ を 2 乗可積分な $\{\mathcal{F}_n\}$-マルチンゲールとするとき条件付き Jensen の不等式から

$$E[M_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \leq (E[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}])^2 = M_{n-1}^2$$

なので、M_n^2 は $\{\mathcal{F}_n\}$-劣マルチンゲールとなる。このとき、 M_n^2 の Doob 分解の可予測単調増加過程 A_n は２次変分過程

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} E[(M_j - M_{j-1})^2 \mid \mathcal{F}_{j-1}]$$

となる。実際、Doob 分解により、

$$A_n = E[M_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] - M_{n-1}^2$$

であるが、右辺は

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= E[M_n^2 - M_{n-1}^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[(M_n - M_{n-1})(M_n + M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[(M_n - M_{n-1})^2 + 2M_{n-1}(M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}] + 2M_{n-1}E[M_n - M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= E[(M_n - M_{n-1})^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}]
\end{aligned}$$

となる。

練習問題 1.8 $\xi_n, S_n, \mathcal{F}_n$ を上の例 1.5 と同じようにとり、$\alpha > 0$ のとき、

$$V_n = e^{\alpha n} S_n$$

とおくと、V_n が $\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲールになることを示し、このときの Doob 分解の M_n, A_n を求めよ。