1.12 簡単な場合の重複対数の法則

補題 1.33 X が標準正規分布に従う確率変数の時、任意の $x>0$ に対して

(1) $P(X>x) \le x^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{1}{2}x^2)$

(2) $P(X>x) \ge (x+x^{-1})^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{1}{2}x^2)$

証明

$$\begin{aligned} P(X>x) &= \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt = \int_x^\infty t^{-1}\left(t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\right)dt \\ &= \left[-t^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\right]_x^\infty - \int_x^\infty t^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \\ &= x^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty t^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \end{aligned}$$

まず、右辺第 2 項は負なので、これを取り除くと大きくなり、

$$P(X>x) \le x^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

がでて、(1) が言える。また、

$$-\int_x^\infty t^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt \ge -\int_x^\infty x^{-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}\,dt$$

なので、これを移項すると、

$$(1+x^{-2})P(X>x) \ge x^{-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$

となる。両辺を $(1+x^{-2})$ でわると、求める (2) 式を得る。 □

定理 1.34 $\{X(n)\}$ を独立同分布な確率変数列で、その分布は標準正規分布であるものとする。

$$S_n = X(1)+X(2)+\ldots+X(n)$$

とすると、確率 1 で

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1$$

が成立する。

証明 1°) $\mathcal{F}_n = \sigma\{X(k); 1\le k\le n\}$ とおくと、S_n は $\mathcal{F}_n$-マルチンゲールになり、独立性と標準正規分布の性質より

$$E[e^{\theta S_n}] = e^{\theta^2 n/2} < \infty$$

となる。特に、条件つき Jensen の不等式から $e^{\theta S_n}$ は 非負の $\mathcal{F}_n$-劣マルチンゲールである。したがって、マルチンゲールの不等式から

$$P(\sup_{1\le k\le n} S_k \ge \lambda) \le e^{-\lambda\theta}e^{\theta^2 n/2}$$

を得る。$\theta = \frac{\lambda}{n}$ととると、

$$P(\sup_{1\le k\le n} S_k \ge \lambda) \le e^{-\lambda^2/2n} \tag{1.17}$$

2°) 任意の $\varepsilon>0$ に対して (1.17) より、

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{1\le k\le(1+\varepsilon)^n} S_k \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2(1+\varepsilon)^{n-1}\log\log(1+\varepsilon)^{n-1}}\right) \\ \le\ & \exp\{-(1+\varepsilon)\log\log(1+\varepsilon)^{n-1}\} \\ =\ & (n-1)^{-(1+\varepsilon)}(\log(1+\varepsilon))^{-(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

これを n について和をとると有限だから

$$\sum_{n=2}^\infty P(\sup_{1\le k\le(1+\varepsilon)^n} S_k \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2(1+\varepsilon)^{n-1}\log\log(1+\varepsilon)^{n-1}}) < \infty$$

Borel-Cantelli の補題により、このとき、確率 1 で 十分大きな n では $(1+\varepsilon)^{n-1}\le k\le(1+\varepsilon)^n$ のとき

$$S_k \le \sup_{1\le k\le(1+\varepsilon)^n} S_k < (1+\varepsilon)\sqrt{2(1+\varepsilon)^{n-1}\log\log(1+\varepsilon)^{n-1}}$$

が成り立っている。 $x\log\log x$ は $x\ge e$ で単調増加なので、

$$\text{上式右辺} \le (1+\varepsilon)\sqrt{2k\log\log k}$$

となり、

$$\frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}} \le 1+\varepsilon$$

が十分大きな k では常に成り立っている。これより、

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}}\leq 1+\varepsilon$$

$\varepsilon\to 0$ として、

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S_k}{\sqrt{2k\log\log k}}\leq 1$$

が言えた。S_n は分布が正負の部分で対称なので、

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{S_n}{\sqrt{2n\log\log n}}\geq -1$$

が分かる。

3°) 記号が複雑になるので、S_n を $S(n)$ と書き直す。$L\in\mathbb{N}$ とし、$\varepsilon>0$ は小さいものとする。

$$A_n:=\{S(L^{n+1})-S(L^n)>(1-\varepsilon)\varphi(L^{n+1}-L^n)\}$$

とおく。ただし、

$$\varphi(x)=\sqrt{2x\log\log x}$$

である。独立同分布な Gauss 確率変数の和なので Gauss 分布をもち $S(L^{n+1})-S(L^n)$ は $N(0,L^{n+1}-L^n)$ に従う。ゆえに、

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(L^{n+1}-L^n)}}\int_{(1-\varepsilon)\varphi(L^{n+1}-L^n)}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2(L^{n+1}-L^n)}}\,dx\\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(1-\varepsilon)\sqrt{\log\log(L^{n+1}-L^n)}}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\
&\geq (y+y^{-1})\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-y^2/2}\quad \because \text{補題 } 1.33
\end{aligned}$$

ただし、

$$y=(1-\varepsilon)\sqrt{2\log\log(L^{n+1}-L^n)}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
e^{-y^2/2} &= e^{-(1-\varepsilon)^2\log\log(L^{n+1}-L^n)}\\
&\geq e^{-(1-\varepsilon)^2\log((n+1)\log L)}\\
&= ((n+1)\log L)^{-(1-\varepsilon)^2}
\end{aligned}$$

だから、

$$e^{-y^2/2}(y+y^{-1})^{-1}\geq(n\log L)^{-(1-\varepsilon)^2}\times\frac{1}{\sqrt{4\pi L^{n+1}\log\log L^{n+1}}}$$

で、これを n について加えると発散する。したがって、A_n 達は独立だから、Borel-Cantelli の第 2 補題から確率 1 で A_n は無限回起こる。つまり、確率 1 で無限の n に対して

$$S(L^{n+1})>(1-\varepsilon)\varphi(L^{n+1}-L^n)+S(L^n)$$

が成り立つ。

ところが、 2°) より、確率 1 で十分大きな n では

$$S(L^n)\leq 2\sqrt{2L^n\log\log L^n}=2\varphi(L^n)$$

が成り立っているので、

$$S(L^{n+1})\geq(1-\varepsilon)\varphi(L^{n+1}-L^n)-2\varphi(L^n)$$

両辺を $\varphi(L^{n+1})$ でわると、

$$\frac{S(L^{n+1})}{\varphi(L^{n+1})}\geq(1-\varepsilon)\sqrt{(1-L^{-1})}(1+o(1))-2L^{-1/2}$$

したがって、

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S(k)}{\varphi(k)}\geq(1-\varepsilon)\sqrt{(1-L^{-1})}-2L^{-1/2}$$

が確率 1 で任意の $L\geq 2$ で成り立つ。 $L\to\infty,\varepsilon\to 0$ として

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{S(k)}{\varphi(k)}\geq 1\quad a.e.$$

が成り立つ。

□