微分積分学入門 テスト解答 (2010 年 07 月 27 日 (火曜日) 2 限実施)

1. 次の関数の導関数を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{x^3}$　　(2)x^e　　(3) $x^2 \log x$

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3x+1}}$　　(5) 3^x

[**解答**]

(1)　$f'(x) = -3x^{-4}$

(2)　$f'(x) = ex^{e-1}$

(3)　$f'(x) = 2x\log x + x^2 \cdot \dfrac{1}{x} = x(2\log x + 1)$

(4)　$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x^2+3x+1)^{-3/2}(2x+3) = -\dfrac{2x+3}{2\sqrt{(x^2+3x+1)^3}}$

(5)　$y = 3^x$ として、対数を取って $\log y = x \log 3$ 両辺を x で微分して

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log 3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3^x \log 3$$

2. 次の関数の不定積分を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$ (2) $\cos(\pi x)$ (3) $\dfrac{\log x}{x}$ (4) xe^x (5) $\dfrac{1}{x^3}$

[**解答**]

(1)

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)$$

ゆえに、

$$\int \frac{1}{(x+1)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)\,dx = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C$$

(2) $\displaystyle\int \cos(\pi x)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x) + C$

(3) $t = \log x$ とおくと、$dt = \frac{dx}{x}$ よって

$$\int \frac{\log x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

(4) $\displaystyle\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx = \int x^{-3}\,dx = \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

3. 次の定積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$ (3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx$ (5) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

[**解答**]

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1$

(2) $t = 1+\sin x$ とおくと、x が 0 から $\pi/2$ まで動く時、t は 1 から 2 まで動く。$dt = \cos x\,dx$ だから

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{t}\,dt = \log 2$$

(3) $t = 1+x^2$ とおく。x が 0 から 1 まで動く時、t は 1 から 2 まで動く。$dt = 2x\,dx$ だから、

$$\int_0^{x} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \left[\sqrt{t}\right]_1^2 = \sqrt{2}-1$$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = I$ と書く。

$$\begin{aligned} I &= [e^x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \sin x\,dx \\ &= -e^{\pi} - 1 + [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx \\ &= -e^{\pi} - 1 - I \end{aligned}$$

ゆえに

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x\,dx = -\frac{e^{\pi}+1}{2}$$

(5) $t = x-1$ とおく。 x が 1 から 2 まで動く時、t は 0 から 1 まで動く。$dt = dx$ だから、

$$\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_0^1 (t+1)\sqrt{t}\,dt = \left[\frac{2}{5}t^{5/2} + \frac{2}{3}t^2 3\right]_0^1 = \frac{16}{15}$$

4. (1)$x \geq 1$ のとき、 $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ の増減表を書き、$y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
(2)(1) の結果から π^e と e^π のどちらが大きいか結論せよ。

[**解答**]　(1) $f'(x) = \frac{1-\log x}{x^2}$ f の増減表は $\log x$ が $x \geq 1$ では単調増加であるので、下のようになる

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$
f'	1	$+$	0	$-$
f	0	$\nearrow$	e^{-1}(最大値)	$\searrow$

ついでに変曲点を求めると、

$$f''(x) = \frac{-3 + 2\log x}{x^3}$$

なので、$x = e^{3/2}$ で、このとき $f(3/2) = \frac{3}{2}e^{-3/2}$ $x < e^{3/2}$ では $f''(x) < 0$ なので上に凸。$x > e^{3/2}$ で下に凸。

グラフは省略

(2) 上の事から $f(e) > f(\pi)$ なので、これを書いてみると

$$\frac{\log e}{e} > \frac{\log \pi}{\pi} \quad \therefore \pi \log e > e \log \pi$$

つまり、 $\log e^\pi > \log \pi^e$ だから、$\log x$ が単調増加なことを合わせると、$e^\pi > \pi^e$ である。

5. 関数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2-3y+1$ の極値を調べよ。

[**解答**]　極値を取る点では $f_x=f_y=0$ が成り立っているから、

$$\begin{aligned} f_x &= 2x-y=0 &\quad(1)\\ f_y &= -x+2y-3=0 &\quad(2)\end{aligned}$$

が成り立つ。(1) を (2) に代入して、

$$-x+4x-3=0 \quad \therefore x=1, y=2$$

したがって、極値を取る点の候補は $(x,y)=(1,2)$ f の 2 階偏微分をすべて求めると、

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\\ f_{xy} &= f_{yx}=-1\\ f_{yy} &= 2\end{aligned}$$

と定数になり、判別式 $D=f_{xy}^2-f_{xx}f_{yy}=1-4<0$ かつ $f_{xx}(1,2)=2>0$ なので、$f(1,2)=1-2+4-6+1=-2$ は極小値となる。