第1章　Brown 運動

1.1　歴史

Robert Brown (1827) 花粉を水に浮かべてその動きを観察.
非常に奇妙な動きをする.（まるで生きている様に）
どんな花粉も同じ様な動きをする．たとえ死んだ植物の花粉でも.
以後，この花粉の運動を Brown 運動と呼ぶことになる.

よく見ると，この動きは，それまでどの様に動いて来たかということはそれから後の動きには全く影響を与えていないようである.
複数の花粉の動きはなんの関連も見られない.
時間がたっても弱らないで，同じ動きかたをする.（二年間も観察した学者がいた.）

Albert Einstein(1905) この動きは，Einstein により水の分子が花粉に衝突しておこる運動であることが説明された.

Jean Perrin(1908) コロイド溶液を使った実験で Einstein の理論を実証

Nobert Wiener (1923) そのような Brown 運動の理想化が数学的な Brown 運動の定義．Wiener にちなんで（実際の花粉の運動とは違う**理想化**という意味もこめて） Wiener 過程ともよばれる.

これが，通常語られる数学における Brown 運動の歴史であるが，実はまったく違うところに似たような研究がなされていた.

L.Bashlier (1900) Théorie de la spéculation という題の学位論文の中で，すでに Brown 運動の性質を使ったオプションの価格付けを議論している.

1.2 Brown 運動の数学的な定義

定義 1.1 (確率過程) $[0,\infty)$ の各実数 t に対して確率変数 $X(t)$ が与えられているとき，この確率変数の系 $\{X(t)\ ;\ t\in[0,\infty)\}$ を確率過程という．

定義 1.2 (Brown 運動) $(\omega,\mathcal{F},P)$ 上定義された確率過程 $\{B(t);t\in[0,\infty)\}$ が 1 次元 **Brown 運動**であるとは，

(i) $B(0)=0 \quad almost \quad surely$ ($a.s.$ と略記する)

(ii) $0\le s<t$ のとき，$B(t)-B(s)$ は $\sigma\{B(u)\ ;\ u\in[0,s]\}$ と独立で，その分布は $N(0,t-s)$ (平均 0, 分散 $t-s$ のガウス分布)

の二つの条件を満たすときにいう．d 個の独立な 1 次元ブラウン運動 $\{B_j(t);t\in[0,\infty)\}$ $(j=1,2,\dots,d)$ に対して，$\{(B_1(t),\dots,B_d(t))\ ;\ t\in[0,\infty)\}$ を d 次元 Brown 運動とよぶ．

$0<s<t$ のとき、$B(t)$ と $B(s)$ の同時分布を調べるために、特性関数

$$\varphi_{s,t}(u,v)=E[e^{iuB(s)+ivB(t)}]$$

を計算してみよう。

$$\begin{aligned}\varphi_{s,t}(u,v)&=E[e^{i(u+v)B(s)+iv(B(t)-B(s))}]\\&=E[e^{i(u+v)B(s)}]E[e^{iv(B(t)-B(s))}]\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(u+v)x-\frac{x^2}{2s}}\,dx\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iyv-\frac{y^2}{2(t-s)}}\,dy\\&=\exp\{-\frac{s(u+v)^2}{2}-\frac{(t-s)v^2}{2}\}\end{aligned}$$

とかける。これで $(B(s),B(t))$ の同時分布が求まる。

練習問題 1.1 (Brown 運動の有限次元分布)
$0=t_0<t_1<\dots<t_k$ に対して $\mathbb{R}^n$ 上の確率分布 $\mu_{t_1,\dots,t_k}$ を

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(dx_1dx_2\cdots dx_k)=P(B(t_1)\in dx_1,\dots,B(t_k)\in dx_k)$$

で与える。$\mu_{t_1,\dots,t_k}$ は $(B(t_1),\dots,B(t_k))$ の**同時分布** と呼ばれる。このとき、k 変数の連続関数 $f(x_1,\dots,x_k)$ に対して

$$\begin{aligned}
&E\left(f(B(t_1),B(t_2),\dots,B(t_k))\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^k} f(x_1,\dots,x_k)\mu_{t_1,\dots,t_k}(dx_1dx_2\cdots dx_k)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(y_1,y_1+y_2,\dots,y_1+y_2+\dots+y_k)\\
&\prod_{j=1}^{k} g_{t_j-t_{j-1}}(x_j-x_{j-1})\prod_{j=1}^{k} dy_j
\end{aligned}$$

とかける事を証明せよ。ただし、

$$g_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{1}{2t}x^2}$$

である。$\{\mu_{t_1,\dots,t_k}\,;\,0<t_1<\dots,t_k,k\geq 1\}$ を総称して Brown 運動の**有限次元分布** と呼ぶ。

1 次元 Brown 運動を単に $B(t)$ と書くとき，σ-加法族 $\sigma\{B(u)\,;\,u\in[0,t]\}$ を $\mathcal{F}_t^B$ と書き，**自然なフィルトレーション**という．これは，時刻 t までの Brown 運動の軌跡によって得られる情報の全体である．

時刻 t までに得られるほかの情報を付け加えても，Brown 運動の先の動きは予測できないと思われる．そこで，一般に時刻 t までに得られる情報の全体を $\mathcal{F}_t$ と書くとき,（これも σ-加法族）上の Brown 運動の定義で $\mathcal{F}_t^B$ を $\mathcal{F}_t$ でおきかえて定義したものを $\mathcal{F}_t$-Brown 運動とよぶ．

$t\leq s$ ならば, $\mathcal{F}_t\subset\mathcal{F}_s$ である. このような $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の系 $\{\mathcal{F}_t\,;\,t\in[0,\infty)\}$ を一般に**フィルトレーション**とよぶ.

以下、今後の議論のため必要な補題を復習しておく。

補題 1.1 (Chebyshev **の不等式**)
X が可積分な確率変数のとき，$p>0$ に対して，

$$P\left(|X(\omega)|\geq\lambda\right)\leq\frac{E\{|X|^p\}}{\lambda^p}\tag{1.1}$$

が成り立つ．

証明　$A=\{|X|\geq\lambda\}$ とおくと，

$$E\{|X|^p\}=\int_A|X|^pP(d\omega)\geq\int_A\lambda^pP(d\omega)=P(A)\lambda^p.$$

両辺を λ^p で割れば，(1.1) を得る．□

補題 1.2 (Borel-Cantelli の補題)　$\{A_n\}_{n\geq1}\subset\mathcal{F}$ とする．このとき以下が成立．

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ ならば，

$$P(\text{無限個の } n \text{ について } A_n \text{ が成立})=P(\cap_{k\geq n}\cup_{n\geq1}A_k)=0$$

(ii) 逆に，$\{A_n\}$ が独立で，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\infty$ ならば，

$$P(\text{無限個の } n \text{ について } A_n \text{ が成立})=1$$

証明　(i)　確率の劣加法性により，

$$P(\cup_{k\geq n}A_n)\leq\sum_{k\geq n}P(A_n). \tag{1.2}$$

条件より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)<\infty$ なので，(1.2) 右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．一方，(1.2) 左辺は $n\to\infty$ のとき，確率の連続性から $P(\cap_{k\geq n}\cup_{n\geq1}A_k)$ に収束．

(ii)　$\{A_n\}_{n\geq1}$ の独立性から，任意の $k<\ell$ について，

$$P(\{\cup_{k\leq n\leq\ell}A_n\}^c)=P(\cap_{k\leq n\leq\ell}A_k^c)=\prod_{k\leq n\leq\ell}P(A_n^c).$$

$0\leq x\leq1$ に対して $1-x\leq e^{-x}$ だから，$P(A_n^c)\leq e^{-P(A_n)}$ となる．ゆえに，

$$\prod_{k\leq n\leq\ell}P(A_n^c)\leq\exp\{-\sum_{k\leq n\leq\ell}P(A_n)\}.$$

条件より，上式右辺は $m\to\infty$ のとき 0 に収束するので，

$$P(\cup_{n\geq k}A_n)=1.$$

$k\geq1$ について共通部分を取って，結論を得る．□