4.2 反射原理と Brown 運動の到達時刻の分布

$\mathcal{F}_t$-Brown 運動 $B(t)$ と $x \in \mathbf{R}$ に対して

$$T_x = \inf\{t \geq 0, B(t) = x\}$$

とおく．

定理 4.7 (反射原理) 任意の $x \in \mathbf{R}$ と $t > 0$ に対し

$$P\left[T_x \leq t\right] = 2P\left[B(t) \geq |x|\right] \tag{4.2}$$

証明 Brown 運動の分布の対称性から $x \geq 0$ として話を進めてもかまわない．

$$P\left[T_x \leq t\right] = P\left[T_x \leq t, B(t) \geq x\right] + P\left[T_x \leq t, B(t) \leq x\right]$$

と分解しておくと

$$\begin{array}{rcl} \text{右辺第 1 項} & = & P\left[B(t) \geq x\right], \\ \text{右辺第 2 項} & = & E\left[P\left(B(t) \leq x \middle| \mathcal{F}_{T_x}\right) 1_{\{T_x \leq t\}}\right] \\ & = & \displaystyle\int_0^t P[B_{t-s} \leq 0] P(T_x \in ds) \quad (\text{強マルコフ性}) \\ & = & \displaystyle\int_0^t P[B_{t-s} \geq 0] P(T_x \in ds) \quad (\text{Brown 運動の対称性}) \\ & = & P\left[B(t) \geq x, T_x \leq t\right] \\ & = & P\left[B(t) \geq x\right]. \end{array}$$

系 4.8 T_x の分布は絶対連続で，その密度関数は

$$P\left[T_x \in dt\right] = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{x^2}{2t}\right] dt$$

また， T_x のラプラス変換は

$$E\left[e^{-\alpha T_x}\right] = e^{-|x|\sqrt{2\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

となる．

証明 これも対称性から $x > 0$ としてよい．このとき

$$P\left[T_x \leq t\right] = 2P\left[B(t) \geq x\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2t}}\, du = \sqrt{2}\pi \int_{\frac{x}{\sqrt{t}}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\, dv$$

これを t について微分して

$$\begin{array}{rcl} P(T_x \in dt) & = & \displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \frac{x}{2\sqrt{t^3}}\, dt \\ & = & \displaystyle\frac{x}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt \end{array}$$

ラプラス変換を計算しよう．

$$\begin{array}{rcl} E\left[e^{-\alpha T_x}\right] & = & \displaystyle\int_0^\infty e^{-\alpha t} P(T_x \in dt) \\ & = & \displaystyle\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^{-3/2} e^{-\alpha t - \frac{x^2}{2t}}\, dt \end{array} \tag{4.3}$$

である．いま，

$$E\left[e^{-\alpha T_x}\right] = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}} \Phi(\alpha, x)$$

と書く．x は固定しているので省略して $\Phi(\alpha, x)$ を単に $\Phi(\alpha)$ と書く．(4.3) において，$\mu = \frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}}$ に対して $t = \mu s$ と変数変換をすると，

$$\Phi(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\mu\alpha s - \frac{x^2}{2\mu s}} (\mu s)^{-3/2} \mu ds = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty s^{-3/2} e^{-|x|\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(s+s^{-1})}\, ds \tag{4.4}$$

$t = 1/s$ で変換すると右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-|x|\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(t+t^{-1})}\, ds$$

一方，$\Phi(\alpha)$ を α で微分すると、

$$\Phi'(\alpha) = -\int_0^\infty t^{-1/2} e^{-\alpha t} e^{-\frac{x^2}{2t}}\, dt$$

右辺で $t = \mu s$ と変数変換をすると，

$$\Phi'(\alpha) = -\sqrt{\mu} \int_0^\infty s^{-1/2} e^{-|x|\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(s+s^{-1})}\, ds$$

となり，この値は (4.4) より $-\mu\Phi(\alpha)$ に等しい．したがって

$$\Phi'(\alpha) = -\mu\Phi(\alpha) = -\frac{|x|}{\sqrt{2\alpha}}\Phi(\alpha).$$

この微分方程式を解いて

$$\Phi(\alpha) = \Phi(0)\exp\{-|x|\sqrt{2\alpha}\}$$

で，

$$E\left[e^{-\alpha T_x}\right] = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\Phi(\alpha) = \frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\Phi(0)\exp\{-|x|\sqrt{2\alpha}\}$$

で $\alpha = 0$ として $\frac{|x|}{\sqrt{2\pi}}\Phi(0) = 1$ がわかり，求めるラプラス変換の形が得られる．

4.3 Girsanov の定理とドリフトつき Brown 運動

$B(t)$ を $\mathcal{F}_t$-Brown 運動とするとき，

$$\int_0^T \theta_t^2 dt < \infty \quad a.s.$$

となる $\mathcal{F}_t$-適合過程 θ_t に対して

$$Z_t = \exp\left\{\int_0^t \theta_s\, dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2\, ds\right\}$$

が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであるとする．

$$P_T(A) = E\left[Z^T\,;\,A\right] \tag{4.5}$$

によって定義した $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度 P_T について，任意の $0 \le t \le T$ に対して $A \in \mathcal{F}_t$ のとき

$$P_T(A) = E\left[Z_T\,;\,A\right] = E\left[Z_t\,;\,A\right]$$

が Z_t のマルチンゲール性から得られる．Girsanov の定理はこの性質に基づくもので次のように述べられる．

定理 4.9 (Girsanov の定理)　$(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で考えたとき $W_T = B(t) - \int_0^t \theta_t\, dt$ は $\mathcal{F}_T$-Brown 運動になる．

証明　$\theta = a$ （定数）という簡単な場合にのみ証明を与えておく．完全な証明は連続マルチンゲールの表現定理に基づく（次章参照）．最初に $\theta = a$ の場合は $Z_t = \exp\{aB(t) - \frac{a^2}{2}t\}$ は

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T Z_t^2 dt\right] &= \int_0^T E\left[\exp\{2aB(t) - a^2 t\}\right]\, dt \\ &= \int_0^T \exp\{a^2 t\} dt < \infty \end{aligned}$$

となり，これは $\mathcal{L}^2$ の元であることに注意する．

次に $e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t}$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールになることを確かめる．伊藤の公式により，

$$\begin{aligned} e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t} Z_t &= 1 + \int_0^t (i\xi) e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} Z_s\, dW_s \\ &\quad + a\int_0^T e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} Z_s dBs \\ &\quad + ia\xi \int_0^T e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} Z_s ds \\ &= 1 + \int_0^T (i\xi + a) e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} Z_s\, dB(s) \end{aligned}$$

となり，これは P について $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール．したがって $t > s, A \in \mathcal{F}_s$ のとき

$$\begin{aligned} E_T\left[e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t}\,;\,A\right] &= E\left[e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t} Z_t\,;\,A\right] \\ &= E\left[e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} Z_s\,;\,A\right] \\ &= E_T\left[e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s}\,;\,A\right] \end{aligned}$$

となり，$e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t}$ は P_T について $\mathcal{F}_t$-マルチンゲール．よって

$$E_T\left[e^{i\xi W_t + \frac{\xi^2}{2}t}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{i\xi W_s + \frac{\xi^2}{2}s} \quad \text{a.s.},$$

すなわち

$$E_T\left[e^{i\xi(W_t - W_s)}\middle|\mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{\xi^2}{2}(t-s)} \quad \text{a.s.}$$

となり，P_T でみると $W_t - W_s$ は $\mathcal{F}_s$ と独立で平均 0 分散 $t-s$ のガウス分布に従っており W_t は $\mathcal{F}_t$-Brown 運動である．