

## 1.3 Brown 運動の構成: Gauss 系として

### 1.3.1 Gauss 系

**定義 1.3** (Gauss 系) 確率変数の系  $\{X_\alpha ; \alpha \in \Lambda\}$  が Gauss 系であるとは, 任意の自然数  $n$  と,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \Lambda$  に対して,  $n$  次元確率変数  $(X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n})$  の特性関数が

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(u_1, \dots, u_n) &= E \left[ \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k X_{\alpha_k} \right\} \right] \\ &= \exp \left\{ i \sum_{k=1}^n u_k m_k - \frac{1}{2} \sum_{k, \ell=1}^n V_{k, \ell} u_k u_\ell \right\} \quad (1.1) \end{aligned}$$

(ただし,  $V = (V_{k, \ell})$  は,  $n \times n$  非負定値行列) の形に書けるときに言う. もちろん  $V$  は  $\{\alpha_k\}$  の選びかたで変わる.

**例 1.1**  $X$  が 1 次元 Gauss 確率変数ならば, 1 個だけの確率変数系  $\{X\}$  は Gauss 系である.

**練習問題 1.3** (1.1) を  $u_j$  について微分して,  $u_1 = \dots = u_n = 0$  とおくことにより,

$$EX_j = m_j$$

を示せ. また,  $u_i, u_j$  について微分して,  $u_1 = \dots = u_n = 0$  とおくことにより,

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = E(X_i - m_i)(X_j - m_j) = V_{i, j}$$

である事を確かめよ.

**定理 1.5** (i)  $X_1, \dots, X_n$  がそれぞれ独立な 1 次元 Gauss 確率変数のとき, その和  $X_1 + \dots + X_n$  もまた 1 次元 Gauss 確率変数となる.

(ii)  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  が 1 次元 Gauss 確率変数の列で,  $X_n$  の分布が  $X$  の分布に収束するならば,  $X$  もまた Gauss 確率変数となる.

**練習問題 1.4** 上の定理を証明せよ (ヒント: (i) では  $X_1, \dots, X_n$  が独立な事から  $X_1 + \dots + X_n$  の特性関数

$$\psi(t) = E \left[ e^{it(X_1 + \dots + X_n)} \right]$$

が、それぞれの特性関数

$$\phi_j(t) = E[e^{itX_j}], \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

の積になる．これから， $\psi(t)$  が 1 次元 Gauss 確率変数の特性関数になっている事を示せばよい．(ii) では確率変数の分布が収束すれば特性関数が各点収束する事を使えば良い．

練習問題 1.5  $\{X_n; n \geq 1\}$  が独立な 1 次元 Gauss 確率変数の時，これは Gauss 系であることを証明せよ．

定理 1.6  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  と  $\{Y_\beta\}_{\beta \in B}$  が，それぞれ Gauss 系するとき， $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$  と  $\{Y_\beta\}_{\beta \in B}$  が独立であるための必要かつ十分な条件は

$$\text{cov}(X_\alpha, Y_\beta) = E[(X_\alpha - EX_\alpha)(Y_\beta - EY_\beta)] = 0$$

となることである．

練習問題 1.6 上の定理を証明せよ．十分性については，任意の  $k \geq 1$  と  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in A$  および  $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}$  に対して

$$Y = \sum_{j=1}^k t_j X_{\alpha_j}$$

の特性関数がそれぞれの  $t_j X_{\alpha_j}$  の特性関数の積になっている事を確かめればよい。

### 1.3.2 Gauss 系としての Brown 運動

定理 1.7  $\{B(t), t \in [0, \infty)\}$  を一次元 Brown 運動とするととき，

(i)  $0 \leq s < t < \infty$  ならば，

$$E[B(t)B(s)] = \min\{s, t\} = s.$$

(ii)  $t > 0$  のとき， $n$  を自然数として，

$$E[B(t)^{2n-1}] = 0, \quad E[B(t)^{2n}] = \frac{(2n)!t^n}{n!2^n} \quad (1.2)$$

練習問題 1.7 定理 1.7 を証明せよ .

ヒント :  $B(t) - B(s)$  は  $B(s)$  と独立 . また、

$$E[B(t)^k] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$$

である。

Brown 運動  $\{B(t); t \geq 0\}$  は Gauss 系である。これは任意の  $0 < t_1 < \dots < t_k$  に対して  $(B(t_1), \dots, B(t_k))$  の特性関数を計算してみるとわかる。実際、

$$\begin{aligned} & E[\exp\{i \sum_{j=1}^k u_j B(t_j)\}] \\ &= E[\exp\{\sum_{j=1}^k u_j \sum_{\nu=1}^j (B(t_\nu) - B(t_{\nu-1}))\}] \\ &= E[\exp\{\sum_{\nu=1}^k \xi_\nu (B(t_\nu) - B(t_{\nu-1}))\}] \quad (\xi_\nu = \sum_{j=\nu}^k u_j) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \xi_\nu^2 (t_\nu - t_{\nu-1})\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^k u_i u_j \min\{t_i, t_j\}\right\} \end{aligned}$$

と計算できる。 $V_{i,j} = \min\{t_i, t_j\}$  が非負定値である事は上の計算の最後の 2 行から分かる。

### 1.3.3 三角関数系を使った Brown 運動の構成

定理 1.8  $\xi_0, \xi_1, \dots$  を独立な  $N(0, 1)$  に従う確率変数の列とする。このとき、 $t \in [0, \pi]$  に対して

$$X(t) = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \xi_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} \xi_n \quad (1.3)$$

とおくと、 $X(t)$  は  $t \in [0, \pi]$  のとき Brown 運動となる。

証明  $X(t)$  が Gauss 確率変数であることは定理 1.6 からわかる。(有限和が  $L^2$ -収束)  $X(t)$ ,  $t \in [0, \pi]$  の任意有限個の一次結合はまた一次元 Gauss 確率変数になっていることは, 上と同じ理由でわかる.

$$\text{cov}(X(t), X(s)) = \min\{s, t\} \quad (1.4)$$

をまず示す. これにより,  $0 \leq u \leq s < t$  のとき,

$$\text{cov}(X(t) - X(s), X(u)) = \text{cov}(X(t), X(u)) - \text{cov}(X(s), X(u)) = u - u = 0$$

となり, 独立性が示せる. 1.4 は, Fourier 級数の計算からわかる.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \sin ntdt &= -\frac{\pi}{n} \cos n\pi \\ \int_0^\pi \min\{s, t\} \sin ntdt &= \frac{1}{n^2} \sin ns - \frac{s}{n} \cos n\pi \\ &= \frac{1}{n^2} \sin ns + \frac{s}{\pi} \int_0^\pi t \sin ntdt \end{aligned}$$

これより,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n^2} \sin nt \sin ns + \frac{1}{\pi} ts = \min\{s, t\}.$$

また,  $EX(t) = 0$  は定義から明らか.

$X_n(t)$  を上の  $X(t)$  と同じ様にして作った独立な  $[0, \pi]$  上の Brown 運動とする. 求める  $[0, \infty)$  上の Brown 運動  $B(t)$  は,

$$B(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{[0, n\pi)}(t) X_n(\min\{t, n\pi\} - (n-1)\pi)$$

と定めることができる.