3.3　空間 $\mathcal{L}^2$ の元の確率積分

定義 3.5　確率過程 $\Phi = \Phi(t,\omega)$ が $(\mathcal{F}_t)$-**発展的可測**であるとは，任意の $t \geq 0$ に対して，$\Phi(s,\omega)$ を $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$ の関数と見たとき $\mathcal{B}([0,t]) \times \mathcal{F}_t$-可測となることをいう．

注意　階段型過程は $\mathcal{F}_t$-発展的可測．また，一般に $\mathcal{F}_t$-発展的可測ならば，$\mathcal{F}_t$-適合．逆に，連続な $\mathcal{F}_t$-適合過程は $\mathcal{F}_t$-発展的可測．

なぜなら，$\Phi(t,\omega) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^{n} 1_{(t_{j-1},t_j]}(t)\xi_j$ に対して，

$$\begin{aligned}&\{(s,\omega) \in [0,t] \times \omega;\ \Phi(s,\omega) \leq a\}\\ &= \{0\} \times \{\omega \in \Omega;\ \xi_0(\omega) \leq a\} \cup \bigcup_{j=1}^{n} (t_{j-1},t_j] \times \{\omega \in \Omega;\ \xi_j(\omega) \leq a\}\end{aligned}$$

となるので，階段型過程の発展的可測性がわかる．

Φ が発展的可測ならば，Fubini の定理により，$\mathcal{B}[0,t] \times \mathcal{F}_t$-可測な $\Phi(s,\omega)$ の $s = t$ での切り口として $\Phi(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t$-可測．したがって Φ は $\mathcal{F}_t$-適合．

Φ が連続な $\mathcal{F}_t$-適合過程なら，階段型過程で各点近似できる．よって，Φ は上の事から $\mathcal{F}_t$-発展的可測．

定義 3.6（空間 $\mathcal{L}^2$）　$\mathcal{F}_t$-発展的可測な確率過程 Φ で，任意の $T > 0$ に対して

$$E\left[\int_0^T |\Phi(t,\omega)|^2 ds\right] < \infty \tag{3.4}$$

となるものの全体を $\mathcal{L}^2$ と書く．$\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，

$$\|\Phi\|_T := \{E\left[\int_0^T |\Phi(t,\omega)|^2 ds\right]\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

とおき，$\Phi, \Psi \in \mathcal{L}^2$ に対して

$$\|\Phi - \Psi\| := \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} (\|\Phi - \Psi\| \wedge 1) \tag{3.6}$$

とおく．$\|\Phi - \Psi\| = 0$ のとき，二つの確率過程は $\mathcal{L}^2$ の元としては同一視する．

注意　$\|\cdot\|$ により $\mathcal{L}^2$ は完備な距離空間となる．それは，$\mathcal{L}^2_T$ を $\|\cdot\|_T$ をノルムとするヒルベルト空間と思うと，その完備性から，ここでの極限 $X(t)$ が $\mathcal{L}^2$ のコーシー列に対して定まる．この極限は T について consistent．

補題 3.3　$\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^2$ の中で *dense*.

証明

(i) $\Phi \in \mathcal{L}^2$ が有界のときに $\mathcal{L}_0$ の元で近似できればいい．

(ii) $\Phi_h(t) := \frac{1}{h}\int_{(t-h)\vee 0}^{t} \Phi(s)ds$ を考えると，Lebesgue の微分定理により，任意の ω に対して，ほとんどすべての t について

$$\Phi_h(t,\omega) \to \Phi(t,\omega) \quad (h \to 0)$$

が成り立つ．有界性の仮定と有界収束定理により，$\|\Phi_h - \Phi\| \to 0$ となり，連続な Φ に対して $\mathcal{L}_0$ の元で近似できればいい．この近似は各点では出来ているから，再び有界収束定理を用いれば証明が完結する．

$\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，補題 3.3 から，$\mathcal{L}^2$ で Φ を近似する階段型過程 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ がある．このとき，任意の $T > 0$ に対して，

$$\|\Phi_n - \Phi\|_T \to 0$$

となるので，マルチンゲールの不等式を使うと，

$$E[\max_{0\leq t\leq T} |I(\Phi_n)(t) - I(\Phi_m)(t)|^2] \leq 4E\left[\int_0^T |\Phi_n(t) - \Phi_m(t)|^2 ds\right]$$

となるが，右辺は $4\|\Phi_n - \Phi_m\|_T^2 \to 0$ となる．よって，確率 1 で $I(\Phi_n)(t)$ は広義一様収束し，極限は連続な確率過程となる．この極限は，近似列 $\{\Phi_n\}$ の取り方によらない．この極限を Φ の Brown 運動 $B(t)$ に**関する確率積分**とよび，

$$\int_0^t \Phi(s)dB(s)$$

と書く．

参考：マルチンゲールの不等式

$M(t)$ が $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ に関してマルチンゲールのとき，つまり，任意の $t > s$ に対して

$$E[M(t) \mid \mathcal{F}_s] = M(s) \quad a.s.$$

となり，なおかつ，ある $p > 1$ に対して $E[|M(t)|^p] < \infty$ がすべての t について成り立っている時，

$$E\left[\max_{0\leq t\leq T} |M(t)|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M(T)|^p].$$

補題 3.4 　任意の $t, s \geq 0$ に対して

$$\int_0^t 1_{[0,s]}(u)\Phi(u)dB(u) = \int_0^{s\wedge t} \Phi(u)dB(u)$$

証明 $\Phi \in \mathcal{L}_0$ のときは確率積分の定義から明らか．あとは極限をとればいい．

区間 $[a, b]$ に対する確率積分は，上の事から

$$\int_a^b \Phi(s)dB(s) = \int_0^b \Phi(s)1_{[a,b]}(s)dB(s)$$

によって定義することができる．これで，普通の積分のように，確率積分の区間に対する加法性が成り立つ．

定理 3.5 　$\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，その確率積分

$$I(\Phi)(t) = \int_0^t \Phi(s, \omega)dB(s)$$

は，以下の性質を持つ．

(i) $(\mathcal{F}_t)$-適合性) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $I(\Phi)(t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測

(ii) (連続性) $I(\Phi)(t)$ は t について連続 $a.s.$

(iii) (線形性)

$$I(\alpha\Phi + \beta\Psi)(t) = \alpha I(\Phi)(t) + \beta I(\Psi)(t) \quad a.s.$$

(iv) (マルチンゲール性)

$$E\big(I(\Phi)(t)\big|\mathcal{F}_s\big) = I(\Phi)(s) \quad a.s.$$

(v) (等長性)

$$E\big((I(\Phi)(t))^2\big) = E\int_0^t \Phi(s)^2 ds$$

さらに一般に $t > v$ のとき，

$$E\Big[(I(\Phi)(t))^2 - E\int_0^t \Phi(s)^2 ds\Big|\mathcal{F}_v\Big] = I(\Phi)(v)^2 - E\int_0^v \Phi(s)^2 ds$$

証明は $\mathcal{L}_0$ で成立している式の極限を取ればいい．