3.4　伊藤の公式 (Ito formula)

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，次の様な確率過程を考える．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)ds + \int_0^t a(s,\omega)dB(s) \tag{3.7}$$

ここに， $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ はともに $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程で，任意の $T>0$ に対して

$$\int_0^T |b(s,\omega)|ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.8}$$

$$\int_0^T |a(s,\omega)|^2 ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{3.9}$$

をみたすものとする．このような確率過程は**伊藤過程**ともよばれ，連続な確率過程の重要な例として知られている．

定理 3.6 M_t が連続な $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールで，

$$M_t = \int_0^t K_s\,ds \quad \text{ただし} \quad \int_0^T |K_s|\,ds < \infty \;\; a.s.,$$

ならば

$$M_t = 0 \quad \forall t \le T, \quad a.s.$$

となる．

この定理は伊藤過程の分解 (3.7) が一意的であることを意味している．

証明 $\int_0^T |K_s|ds \le N$ となる定数 N がとれるときをまず考える．このとき，$t>s$ として，

$$\begin{aligned} E\left[(M_t - M_s)^2\right] &= E\left[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2\right] \\ E\left[M_tM_s\right] &= E\left[M_sE\big[M_t \mid \mathcal{F}_s\big]\right] = E\left[M_s^2\right] \end{aligned}$$

なので

$$E\left[(M_t - M_s)^2\right] = E\left[M_t^2 - M_s^2\right]$$

となる．いま，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ を区間 $[0,t]$ の分割とするとき，$M_0 = 0$ とあわせて，

$$\begin{aligned} E\left[M_t^2\right] &= E\left[M_t^2 - M_0^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\left[M_{t_{i+1}}^2 - M_{t_i}^2\right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})^2\right] \\ &\le E\left[\sup_{0\le i\le n-1} |M_{t_{i+1}} - Mt_i| \sum_{i=0}^{n-1} |M_{t_{i+1}} - M_{t_i}|\right] \\ &\le E\left[\sup_{0\le i\le n-1} |M_{t_{i+1}} - Mt_i| \int_0^T |K_s|ds\right] \end{aligned}$$

右辺の被積分項は $2N^2$ 以下で，$\sup_{0\le i\le n-1} |M_{t_{i+1}} - Mt_i|$ は，M_t が $[0,t]$ 上一様連続となることから，分割の幅

$$\max_{0\le i\le n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

を 0 に近づけると $a.s.\omega$ に対して 0 に収束するので有界収束定理（または Lebesgue の優収束定理）により，

$$E\left[\sup_{0\le i\le n-1} |M_{t_{i+1}} - Mt_i| \int_0^T |K_s|ds\right] \to 0$$

となる．したがって $M_t = 0,\ a.s.$ がわかる．

一般の場合は停止時刻を使った議論を行う．$N \ge 1$ に対して

$$\tau_N := \begin{cases} \min\{t \ge 0;\ \int_0^t |K_s|ds \ge N\} & \\ \infty, & \text{上の集合が空集合のとき} \end{cases}$$

とおく．Doob の任意抽出定理により $\tilde{M}_t^N = M_{t\wedge\tau_N}$ は $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであり

$$|\tilde{M}_t^N| \le \int_0^{\tau_N} |K_s|ds \le N$$

だから，上の結果が使えて $\tilde{M}_t^N = 0\ a.s.$ がすべての t について成立．$N \to \infty$ とする事により $M_t = 0\ a.s.$ がすべての t で成立．最後に，M_t の連続性から $M_t = 0\ \forall t \in [0,t]\ a.s.$ が従う．

定理 3.7 (**伊藤の公式**) f が C^2 級の関数の時，(3.7) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が *a.s.* で成立する．

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) \quad &+ \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega)f'(X(s)) + \frac{1}{2}a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds \\ &+ \quad \int a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) \end{aligned} \tag{3.10}$$

証明 f がコンパクトな台を持ち，a, b が有界な場合を考える．f, f', f'' はこのときすべて有界かつ一様連続となっていることに注意する．任意に $t > 0$ を固定する．$\{t_k^{(n)}; 0 \le k \le 2^n\}$ は $[0,t]$ の 2^n 等分点と a の $[0,t]$ の分点をあわせたものを小さい順に並べたものとする．$(t_0^{(n)} = 0,\ t_{\beta(n)}^{(n)} = t)$.

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left[f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \right]$$

として，各 j において 2 次まで Taylor 展開．

$$\begin{aligned} f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \quad &= \quad f'(X(t_{j-1}^{(n)}))[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})] \\ &\quad + \frac{1}{2}f''(\theta_j^{(n)})[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})]^2. \end{aligned}$$

右辺第 1 項の和を I, 第 2 項の和を II とかく．

$$\begin{aligned} I \quad &= \quad \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\big] \\ &= \quad \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s) \\ &= \quad \int_0^t f'(X(s))b(s,\omega)ds + \int_0^t f'(X(s))a(s,\omega)dB(s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] b(s,\omega)ds \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] a(s,\omega)dB(s) \\ &:= \quad I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

I_1 と I_2 は (3.10) の右辺に現れている．

$n \to \infty$ のとき $I_3 \to 0$ （t について広義一様)a.s. が成り立つ．なぜなら，$f'(X(t))$ は t について一様連続なので，

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] b(s,\omega)ds \\ \le \quad &\Big(\sup_{\substack{|u-v| \le 2^{-n}, \\ u,v \in [0,T]}} |f'(X(u)) - f'(X(v))| \Big) \int_0^t |b(s,\omega)|ds. \end{aligned}$$

右辺は t について広義一様に 0 に収束する．

$I_4 \to 0 \quad in\ L^2(P)$ である．なぜなら，定理 3.5 により，

$$\begin{aligned} &E\Big(\sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big] a(s,\omega)dB(s) \Big)^2 \\ = \quad &\sum_{j=1}^{\beta(n)} E \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s))\big]^2 a(s,\omega)^2 ds. \end{aligned}$$

f' が有界かつ連続なことと，X の連続性から有界収束定理により右辺は 0 に収束．以上より，I は $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^t a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) + \int_0^t b(s,\omega)f'(X(s))ds$$

に収束．(この収束は少なくとも確率収束)