練習問題の解答

練習問題 1.4　Ω 上の実数値関数 X が有限個の値 $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ しか取らない時、X が確率変数であることと、

$$X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F} \quad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n$$

とは同値であることを証明せよ。

解答　X を確率変数とする。X の取り得る値を小さい順に $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ と並べてあるとして良い。任意の i に対して

$$X^{-1}(\{a_i\}) = \{\omega \in \Omega\,;\, a_{i-1} < X(\omega) \le a_i\} = X^{-1}((-\infty, a_i]) \cap \bigl(X^{-1}((-\infty, a_{i-1}])\bigr)^c$$

と書けるので、$X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F}$ が言える。

逆に、任意の i について $X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F}$ とするとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $a_i \le a$ となる a_i のうち、最大のものを a_I とかくと、

$$X(\omega) \le a \Longleftrightarrow X(\omega) \in \{a_1, a_2, \ldots a_I\}$$

でなければならないので、

$$X^{-1}((-\infty, a]) = X^{-1}(\{a_1\}) \cup \ldots X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F}$$

もし、$a < a_1$ ならば、$X(\omega) \le a$ はどの $\omega \in \Omega$ に対しても起こり得ないので、

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \emptyset \in \mathcal{F}$$

となり、この場合も $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ は成り立つ。したがって、X は確率変数である。

講評　なかなか苦労していました。結構惜しいところまで行ってるのが、$a > \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ のとき、

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{X^{-1}(a_1), X^{-1}(a_2), \ldots, X^{-1}(a_n)\}$$

であることが分かっていて、X が確率変数だから $X^{-1}((-\infty, a]) \in \mathcal{F}$ であると結論付けていながら、だから $X^{-1}(\{a_i\}) \in \mathcal{F}$ と飛躍している答案です。

この議論でわかるのは $\{X^{-1}(a_1), \ldots, X^{-1}(a_n)\} \in \mathcal{F}$ ということで、それぞれの $X^{-1}(a_i)\}$ が $\mathcal{F}$ の元になるかどうかはまだ言えていません。あと一歩のところで残念でした。