

練習問題の解答と講評

練習 6.1 次の曲線の指定された区間での長さを求めよ。

(1) $y = x^{3/2}$, $(0 \leq x \leq 5)$

ヒント: $x(t) = t, y(t) = t^{3/2}$ とかくと、公式が使える。

(2) $x(t) = 3t^2 + 2, y(t) = 2t^3 - \frac{1}{2}$, $(1 \leq t \leq 4)$

解答 (1) $x = t, y = t^{3/2}$ とかいて、

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^{1/2} \quad (0 \leq t \leq 5)$$

だから、曲線の長さの公式により、求める長さを L と書くと、

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}t^{1/2}\right)^2} dt = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t} dt$$

$s = 1 + \frac{9}{4}t$ とおいて、 $ds = \frac{9}{4}dt$ だから、

$$L = \int_1^{\frac{49}{4}} s^{1/2} \frac{4}{9} ds = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{7}{2}\right)^3 - 1 \right) = \frac{335}{27}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 6t^2$ だから、

$$L = \int_1^4 \sqrt{(6t)^2 + (6t^2)^2} dt = \int_1^4 6t\sqrt{1+t^2} dt$$

$1+t^2 = u$ とおくと $2tdt = du$ で、 $t = 1, 4$ のとき、 $u = 2, 17$ だから

$$L = \int_2^{17} 3\sqrt{u} du = 2 \left(17\sqrt{17} - 2\sqrt{2} \right)$$

講評 良くできていました。変数変換をした時、新しい変数の動く範囲を間違えている人が何人か見られました。慌てないで計算しましょう。(2) で $u = t + \sqrt{1+t^2}$ とおいた人がいましたが、これでも解けますが、今の場合は $u = 1+t^2$ とか $u = \sqrt{1+t^2}$ とおく方が計算が速いですね。