

練習問題の解答と講評

練習 7.1 次の累次積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy \right) dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y) \, dy \right) dx$$

解答 (1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2 y \, dy dx &= \int_0^1 x^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 (1-x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y) \, dy \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \sin z \, dz dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\cos z]_x^{\frac{\pi}{2}} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1 \end{aligned}$$

講評 良くできていました。累次積分は、1変数の積分を繰り返すだけの話ですから、分かれば簡単ですよ。偏微分を逆にやる感じで、積分する変数以外は定数として扱えばいいわけです。重積分の計算は累次積分が基本です。教科書の練習問題を繰り返し練習して下さい。