練習問題の解答と講評

練習 8.1　次の積分順序を交換せよ。

$$(1) \int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx \qquad (2) \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dxdy$$

$$(3) \int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x,y)\,dydx \qquad (4) \int_{1/2}^1 \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dydx$$

解答　(1)　積分範囲は

$$D = \{(x,y)\,;0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$$

y の動く範囲は $0 \le y \le 1$ で、この範囲の y に対して x は $y \le x$ を満たすので、最初の条件 $0 \le x \le 1$ と合わせて $y \le x \le 1$ となる。したがって

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_y^1 f(x,y)dxdy$$

(2) 積分範囲は

$$D = \{(x,y)\,;0 \le y \le 2, y^2 \le x \le 2y\}$$

x の動く範囲は $0 \le 4 \le 4$ で、この範囲の x に対して 不等式 $y^2 \le x \le 2y$ を y について解くと $\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}$ となる。最初の y の条件 $0 \le y \le 2$ と比べて後の条件のほうが強いので、したがって

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dydx = \int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dxdy$$

(3) 積分範囲は

$$D = \{(x,y); 0 \le x \le 1, x^2 \le y \le x^{1/4}\}$$

y の動き得る範囲は $0^2 = 0 \le y \le 1^{1/4} = 1$ として $0 \le y \le 1$ この y をとめる毎に $x^2 \le y \le x^{1/4}$ を x について解くと $y^4 \le x \le \sqrt{y}$

　$0 \le y \le 1$ のとき、この不等式を満たす x は $0 \le x \le 1$ を満たす。したがって

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x,y)\,dydx = \int_0^1 \int_{y^4}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dxdy$$

(4) 積分範囲は

$$D = \{(x,y); \frac{1}{2} \le x \le 1, x^3 \le y \le x\}$$

y の動き得る範囲は $\frac{1}{8} \le y \le 1$ であり、$x^3 \le y \le x$ を x について解くと

$$y \le x \le \sqrt[3]{y}$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ とあわせると、$\frac{1}{8} \leq y \leq \frac{1}{2}$ では

$$\frac{1}{2} \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

となり、$y \geq \frac{1}{2}$ では

$$y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$$

となる。したがって

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{x^3}^{x} f(x,y)dydx = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \int_{y}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dxdy$$

講評　(1) と (4) のできが悪かったです。(1) は簡単なはずですが、ちゃんと図を描かないでやった人は x の動く範囲が $0 < x < y$ となってしまっています。図を描いても勘違いした人も多かったです。

(4) は積分の順序を入れ換えると、場合分けが必要になる問題です。実際には良く起こる計算です。しっかり練習しておいて下さい。できは悪かったです。