練習問題の解答と講評

練習 10.1　次の 3 重積分を計算せよ。

(i) $$\int_1^4 \int_{z-1}^{2z} \int_0^{y+2z} dxdydz$$

(ii) $$\int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 2xyz\, dzdydx$$

解答 (i) これは内側から順に積分すれば良い。

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_{z-1}^{2z} \int_0^{y+2z} dxdydz &= \int_1^4 \int_{z-1}^{2z} (y+2z)dydz \\
&= \int_1^4 \left[\frac{y^2}{2} + 2yz\right]_{y=z-1}^{y=2z} dz \\
&= \int_1^4 \left(4z^2 + 2z - \frac{(z-1)^2}{2}\right) dz \\
&= \left[\frac{4z^3}{3} + z^2 - \frac{(z-1)^3}{6}\right]_1^4 \\
&= \frac{189}{2}
\end{aligned}$$

(ii) 積分の順序は $dz \to dy \to dx$ となるのは積分範囲を見れば分かるが、これを $dxdydz$ と書いていたのは問題の不備でした。ともあれ、計算は次のようになります。

$$\begin{aligned}
&\int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 2xyzdxdydz \qquad (\text{ 正しくは } dzdydx) \\
&= \int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \left[xyz^2\right] 0^{\sqrt{2y/x}} dydx \\
&= \int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} 2ydydx \\
&= \int_{-2}^4 \left[\frac{2y^3}{3}\right]_{x-1}^{x+1} dx \\
&= \int_{-2}^4 4x^2 + \frac{4}{3} dx \\
&= 104
\end{aligned}$$

講評　(ii) は問題が不適切でしたが、結構たくさん正解していました。混乱した人、ごめんなさい。そのままの順序で積分すると x が残りますね。でも、この様な積分で、積分変数が結果に残るのはおかしいのです。数値が大きく、間違えた人も結構いましたが、君達の計算力はたいしたものです。感心しました。

練習 10.2　$J = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ は $f(x,y)$ を $D = \{(x,y); 0 \le x \le \sqrt{1-y^2}, 0 \le y \le 1\}$ という領域の上で積分したものである。D は原点中心、半径 1 の円の第一象限にある部分だから、先に x をとめて y について積分した後 x について積分する事にすると、$D = \{(x,y)\,; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$ とかける事から $J = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$ ともかける。このことを参考にして $\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} f(x,y,z)\,dxdzdy$ の積分の順序を $dzdydx$ の順番で積分する事にした時、x, y, z のそれぞれの積分範囲がどう変わるかをかけ。

解答　求める積分の積分域は

$$D = \{(x,y,z);\, 0 \le y \le 2,\, 0 \le z \le 4-2y,\, 0 \le x \le 4-2y-z,\}$$

となる。これを $dzdydx$ の順で積分するには、最初に x をとめる。上の領域の中で x が動ける最大の範囲を求める。最後の式から、$0 \le x \le 4-2y-z$ だが、 $0 \le z \le 4-2y$ より、この範囲で z が動くと $0 \le 4-2y-z \le 4-2y$ であるから、y をとめる毎に x の動ける範囲は最大で $0 \le x \le 4-2y$ となる。さらに、 $0 \le y \le 2$ と y が動くので、 x の動ける最大の範囲は $0 \le x \le 4$ となる。

x の動ける最大の範囲は $0 \le x \le 4.$

この様な x を一つとめる。次に y の満たす不等式を見ると、

$$0 \le y \le 2, \quad 2y \le 4-z, \quad 2y \le 4-x-z$$

となるが、$0 \le x$ だから、最後の式が 2 番目の式より強い。y の動ける最大幅は $z=0$ のときで

$$0 \le y \le 2 - \frac{x}{2}$$

となる。最後に、 z の満たす不等式は

$$0 \le z \le 4-2y, \quad 0 \le z \le 4-2y-x$$

の二つがあり、これより、

$$0 \le z \le 4-2y-x$$

が分かる。以上より、

$$\int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^{4-2y-z} f(x,y,z)dxdzdy = \int_0^4 \int_0^{2-\frac{x}{2}} \int_0^{4-2y-x} f(x,y,z)dzdydx$$

となる。

講評　やはり、3 つの変数が動く範囲を書き換えるのは大変なようです。間違えた人も多かったです。分かってしまえば、何という事は無いのですが、それでも勘違いの間違いは多い問題ですね。練習しておきましょう。