練習問題の解答と講評

練習 13.1　空間内のなめらかな曲面 $x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v), \quad (u,v) \in D$ の面積は

$$S = \int_D \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2} dudv$$

によって与えられる。この時、楕円体

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 \leq 1$$

の表面積を求めよ。($a = b = \sqrt{2}$, $c = 1$, $u = \theta$, $v = \phi$, $r = 1$ となっている。)

解答　この曲面は

$$x = \sqrt{2}\cos\theta\sin\phi,\ y = \sqrt{2}\sin\theta\sin\phi,\ z = \cos\phi$$

とパラメータ表示される。$(\theta,\phi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi)$ がパラメータの動く範囲となる。

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{2}\cos\theta\cos\phi \\ \sqrt{2}\cos\theta\sin\phi & \sqrt{2}\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} = -2\sin\phi\cos\phi$$
$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sqrt{2}\cos\theta\sin\phi & \sqrt{2}\sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\sin\phi \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\cos\theta\sin^2\phi$$
$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} 0 & -\sin\phi \\ -\sqrt{2}\sin\theta\sin\phi & \sqrt{2}\cos\theta\cos\phi \end{vmatrix} = -\sqrt{2}\sin\theta\sin^2\phi$$

だから

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 \\
&= 4\sin^2\phi\cos^2\phi + 2\cos^2\theta\sin^4\phi + 2\sin^2\theta\sin^4\phi \\
&= 2\sin^2\phi(2\cos^2\phi + \sin^2\phi) \\
&= 2\sin^2\phi(1 + \cos^2\phi)
\end{aligned}$$

となり、もとめる表面積は

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sqrt{2\sin^2\phi(1+\cos^2\phi)}\, d\phi = 2\sqrt{2}\pi \int_0^{\pi} \sin\phi\sqrt{1+\cos^2\phi} d\phi$$

$t = \cos\phi$ と変数を取り換えると

$$S = 2\sqrt{2}\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = 4\sqrt{2}\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$u=\sqrt{1+t^2}+t$ とおくと、

$$(u-t)^2=1+t^2 \quad \therefore t=\frac{u}{2}-\frac{1}{2u}, \quad dt=\frac{u^2+1}{2u^2}du$$

また

$$\sqrt{1+t^2}=u-t=\frac{u^2+1}{2u}$$

となり、t が 0 から 1 まで動く時、u は 1 から $\sqrt{2}+1$ を動くので、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\,dt &= \int_1^{\sqrt{2}+1}\frac{(1+u^2)^2}{4u^3}\,du \\ &= \frac{1}{4}\int_1^{\sqrt{2}+1}\left(u+\frac{1}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{u^2}{2}+2\log u-\frac{1}{2u^2}\right]_1^{\sqrt{2}+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

$t=\tan\theta$ とおいても計算できるが、上の置換の方が少し計算が少ない。
したがって、求める表面積は

$$|S|=2\sqrt{2}\left(\log(\sqrt{2}+1)+\sqrt{2}\right)\pi$$