まとめの練習問題

1. 次の不定積分を計算せよ

$$(1)\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx,\quad (2)\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx,\quad (3)\int \sin 2x\cos 3x\,dx,$$
$$(4)\int \frac{dx}{x-\sqrt{x}},\quad (5)\int x(x-4)^{1/3}\,dx,\quad (6)\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ (a>0)$$
$$(7)\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}},\quad (8)\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx,\quad (9)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}},$$
$$(10)\int \frac{7x^2+2x-3}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}\,dx,\quad (11)\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}\,dx,\quad (12)\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x^2-4x+5)}\,dx,$$
$$(13)\int xe^x\,dx,\quad (14)\int x\sin 2x\,dx,\quad (15)\int x^3\log x\,dx,$$
$$(16)\int x\tan^{-1}x\,dx,\quad (17)\int x\cos^2 x\sin x\,dx,\quad (18)\int x^5\sqrt{x^3+4}\,dx$$

2. 次の定積分を計算せよ

$$(1)\int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^{1/3}},\quad (2)\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/3}}\,dx,\quad (3)\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx,$$
$$(4)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2},\quad (5)\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+x^4},\quad (6)\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3}$$

注　(6) では非積分関数が $x=-\frac{3}{2}$ で無限大になるので、次のような計算（主値積分）をする。

$$\int_{-2}^0 \frac{dx}{2x+3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{-2}^{-\frac{3}{2}-\varepsilon}\frac{dx}{2x+3} + \int_{-\frac{3}{2}+\varepsilon}^0 \frac{dx}{2x+3}\right)$$

3. 次の広義積分が収束するか発散するかを判定せよ

$$(1)\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^6+x}},\quad (2)\int_1^\infty \frac{\log x}{e^{2x}}\,dx,$$
$$(3)\int_3^\infty \frac{\log x}{x}\,dx,\quad (4)\int_1^\infty \frac{\log x}{x^3}\,dx$$

4. (a) n を自然数として、

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\left[\sum_{k=1}^{2^{n-1}}\cos\frac{2k-1}{2^n}x\right]$$

を証明せよ。

(b) 右辺は $n \to \infty$ のときある関数の定積分に近づく。この関数はなにか。また、定積分はどこからどこまでの区間で積分するものか？

(c) この積分を計算せよ。また、これにより等式

$$\lim_{n\to\infty} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}$$

が成り立つ事を確かめよ。

(d) 上の事を使って

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

が成り立つ事を示せ。(Viète の公式)

5. 関数 $f(x)$ の Laplace 変換 は

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(x)e^{-sx}\,dx$$

と与えられる。 Laplace 変換は微分方程式を解く時に有効である。

(a) $\alpha > -1$ のとき x^α の Laplace 変換は $\Gamma(\alpha+1)/s^{\alpha+1}$ となり、$s > 0$ で正しい。これを証明せよ。

(b) $f(x) = e^{\alpha x}$ のとき、Laplace 変換は $1/(s-\alpha)$ である。これは $s > \alpha$ で正しい。これを証明せよ。

(c) $f(x) = \sin(\alpha x)$ の Laplace 変換は $\alpha/(s^2+\alpha^2)$ である。これは $s > 0$ で正しい。これを証明せよ。

(d) $f(x) = \cos(\alpha x)$ の Laplace 変換を計算せよ。また、これは s がどのような条件を満たす時に計算できるか？

6. 次の正項級数の収束・発散を判定せよ。

$$(1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2n+3},\quad (2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3-4},$$
$$(3)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}},\quad (4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$$