11　変数の変換 I

11.1　領域の変形とヤコビアン

D を xy-平面内の領域として、f が D で積分可能とする。この D が uv-平面内のある領域 E からの関数 $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ によって 1 対 1 に写されるとする。つまり、

$$D=\{(\varphi(u,v),\psi(u,v))\,;\,(u,v)\in E\}$$

であり、$(x,y)\in D$ に対して $(x,y)=\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ となる $(u,v)\in E$ は唯一つしか無いものとする。さらに、 φ,ψ が C^1-級としておく。

このとき、積分

$$\int_D f(x,y)\,dxdy$$

を変数 (u,v) についての E 上の積分で表す事を考える。

簡単のため、E は長方形としておく。$E=[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]$ と書いておこう。E を縦横それぞれ n 等分して小さな長方形を n^2 個作る。それぞれの小長方形を $\Delta_{i,j},(1\le i,j\le n)$ と書くとき、 Φ により、$\Delta_{i,j}$ は $\Phi(\Delta_{i,j})$ に写るので、これらが D の分割になっている。したがって、

$$\int_D f(x,y)\,dxdy=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j}f(\Phi(P_{i,j}))|\Phi(\Delta_{i,j})|$$

とかける。ただし、$P_{i,j}$ は $\Delta_{i,j}$ 内の勝手な点で、$|\Phi(\Delta_{i,j})|$ は $\Phi(\Delta_{i,j})$ の面積とする。

この面積を求める事を考えてみよう。以下、$c=\frac{\beta-\alpha}{n}$, $d=\frac{\delta-\gamma}{n}$ と略記する。E 内の点 $P:(a,b)$ と $Q:(a+c,b)$ を結ぶ u-軸に平行な線分 PQ は Φ によって、どう写るだろうか？

この線分は $\{(a+tc,b);0\le t\le 1\}$ とパラメータで表す事ができるので、 Φ での行き先の曲線 $\Phi(PQ)$ は $\{\varphi(a+tc,b),\psi(a+tc,b)\,;\,0\le t\le 1\}$ となる。いま、c が非常に小さい時、φ と ψ が C^1-級だから、

$$\begin{aligned}\varphi(a+tc,b)&=\varphi(a,b)+\varphi_u(a,b)tc+o(c)\\ \psi(a+tc,b)&=\psi_x(a,b)+\psi_u(a,b)tc+o(c)\end{aligned}$$

ただし、$o(c)$ は $c\to 0$ のとき、これを c で割ったものがまだ 0 に近づく量であることを表す。

$$\lim_{c\to 0}\frac{o(c)}{c}=0$$

このことを、「$\Phi(PS)$ は線分

$$\ell_1:\{(\varphi(a,b)+\varphi_u(a,b)tc,\psi(a,b)+\psi_u(a,b)tc)\,;\,0\le t\le 1\}$$

と距離 $o(c)$ 以内にある」と言っても良い。

また、$R:(a,b+d)$ に対して線分 PR は d が非常に小さい時同じように考える事により、「$\Phi(PR)$ は

$$\ell_2:\{(\varphi(a,b)+\varphi_v(a,b)td,\psi(a,b)+\psi_v(a,b)td)\,;\,0\le t\le 1\}$$

と距離 $o(c)$ 以内にある」と言っても良い。

線分 RS についてはどうであろうか？ φ,ψ はともに C^1-級なので、全微分可能だから、c,d が微小の時、$\Phi(RS)$ 上の点は $0\le t\le 1$ に対して

$$\begin{aligned}&(\varphi(a,b)+\varphi_u(a,b)tc+\varphi_v(a,b)d,\psi(a,b)+\psi_u(a,b)tc+\psi_v(a,b)d)\\&+\Big(o(\sqrt{c^2+d^2}),o(\sqrt{c^2+d^2})\Big)\end{aligned}$$

とかける。このことは $\Phi(RS)$ が ℓ_2 の終点から ℓ_1 に平行に同じ長さだけ伸ばした線分から距離 $o(\sqrt{c^2+d^2})$ 以内にある事がわかる。

同じ事が $\Phi(QS)$ にも言えて、結局、長方形 $PQRS$ は Φ によって ℓ_1 と ℓ_2 で作られる平行四辺形と、距離 $o(\sqrt{c^2+d^2})$ 以内にあり、$\Phi(PQRS)$ が囲む面積はこの平行四辺形の面積 S と誤差が $o(S)$ しかない事が分かる。この平行四辺形の面積は行列式

$$\begin{vmatrix}c\varphi_u(a,b) & c\psi_u(a,b)\\ d\varphi_v(a,b) & d\varphi_v(a,b)\end{vmatrix}=cd\begin{vmatrix}\varphi_u(a,b) & \psi_u(a,b)\\ \varphi_v(a,b) & \varphi_v(a,b)\end{vmatrix}$$

の絶対値で与えられる。この行列式

$$\begin{vmatrix}\varphi_u(a,b) & \varphi_v(a,b)\\ \psi_u(a,b) & \varphi_v(a,b)\end{vmatrix}$$

を写像 $\Phi=(\varphi,\psi)$ のヤコビ行列式 (ヤコビアン：Jacobian) とよび、$J(a,b)=\big(\partial(\varphi,\psi)/\partial(u,v)\big)(a,b)$ とかく。

元の問題に戻ると、上で言った事は

$$|\Phi(\Delta_{i,j})| = |J(P_{i,j})|(1+o(1))|\Delta_{i,j}|$$

とかけ、したがって

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^n f(\phi(P_{i,j}))|J(P_{i,j})||\Delta_{i,j}| = \int_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))|J(u,v)|\,dudv$$

となる。

定理 11.1 $D,\ E$ が面積確定で $\Phi(u,v) = (\varphi(u,v),\psi(u,v))$ が E から D への 1 対 1 の C^1 級写像とする。 このとき、f が D 上積分可能ならば

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_E f(\Phi(u,v))\left|\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\right|\,dudv$$

が成り立つ。

次元が上がった場合も同じ定理が成り立つが、このとき、$(u_1,\ldots,u_n)\in E\subset\mathbb{R}^n$ が $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ に 1 対 1 で写るとき、ヤコビアンは

$$J(u_1,\ldots u_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

となる。
注 上の定理で 1 対 1 の条件は緩める事ができる。良く知られた条件として、集合

$$\{(u,v)\in E\,;\,J(u,v)=0\}$$

の面積が 0 ならば上の公式は正しい。

11.2 変数変換の簡単な例

$E = [0,1]\times[0,1]$ で、$\varphi(u,v) = au+bv, \psi(u,v) = cu+dv$ ただし、$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき、E はこの写像 $\Phi = (\varphi,\psi)$ で

$D = \{(x,y); 4$ 点 $(0,0),(b,d),(a,c),(a+b,c+d)$ で作られる平行四辺形の内点$\}$

に 1 対 1 で写り、f が D 上積分可能ならば

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_E f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right| dudv$$

となる。

例 11.1 $\int_{0\le x+y\le 1, |x-y|\le 1}(x+y)e^{x-y}dxdy$ を計算する。$u = (x+y)/2, v = (x-y)/2$ とおくと、$x = u+v, y = u-v$ となり、$E = \{0\le u\le \frac{1}{2}, |v|\le\frac{1}{2}\}$ は $D = \{0\le x+y\le 1, |x-y|\le 1\}$ と 1 対 1 に対応している。ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

なので、

$$\int_{0\le x+y\le 1, |x-y|\le 1}(x+y)e^{x-y}dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 2ue^{2v}|-2|dvdu = \frac{e-e^{-1}}{4}$$

練習 11.1 ガンマ関数とベータ関数についての良く知られた式を証明しよう。$a>0, b>0$ のとき

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\,dx\int_0^\infty y^{b-1}e^{-y}\,dy = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} x^{a-1}y^{b-1}e^{-x-y}\,dxdy$$

を 2 重積分と見る事ができる。
(1) ここで、次のように変数を変換する。$u = x, v = x+y$. このとき、変換のヤコビアンと u,v の動く範囲を求め、上の積分を u,v の積分で表せ。
(2) さらに変数を $w = \frac{u}{v}$, $z = v$ と変換して、変換のヤコビアンと w,z の動く範囲を求め、

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

が成り立つ事を確かめよ。ただし、$B(a,b)$ はベータ関数で

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

とする。