4　定積分の計算 I

4.1　微分積分学の基本定理

定理 4.1 $a \le x_0 \le b$ として、f が区間 $[a,b]$ で積分可能かつ $x = x_0$ で連続ならば

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

は $x = x_0$ で微分可能で、 $F'(x_0) = f(x_0)$ となる。

証明　f が $x = x_0$ で連続なので、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて、$|x - x_0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

となっている。そこで、$|h| < \delta$ のとき

$$|F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)| = \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\,dt \right| \le \varepsilon |h|$$

となるので、両辺を $|h|$ でわると、

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

これは $|h| < \delta$ ならば常に成り立つ。これは

$$\lim_{|h| \to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

を意味している。つまり、F は $x = x_0$ で微分可能で $F'(x_0) = f(x_0)$　□

微分積分学の基本定理は

「関数 f が連続ならば、区間 $[a,b]$ 上のその定積分は $F(a) = 0$ を満たす f の原始関数である」

ということを言っている。

4.2　広義積分

f が $[a,b]$ 上で積分可能のとき、 (a,b) 上の積分を

$$\int_{(a,b)} f(x)\,dx = \lim_{c \searrow a,\, d \nearrow b} \int_c^d f(x)\,dx$$

と定義する事にしよう。定積分の連続性からこれは $\int_a^b f(x)\,dx$ と等しい。(端の点が入っているか否かは積分ではあまり問題でない)

ただし、$f(x) = \log x$ は $x = 0$ で無限大を取るので、$a > 0$ のとき $[0,a]$ 上で積分を考える事ができない。($[0,a]$ で有界な関数に対してだけ定積分を考えた。) しかし、上の意味で $(0,a]$ 上の積分を考えると、$h > 0$ のとき

$$\int_h^a \log x\,dx = (a\log a - a - h\log h + h) \to a\log a - a$$

と、極限がある。そこで、これを

$$\int_0^a \log x\,dx = a\log a - a$$

と書く。 $\log x$ は区間 $(0,a]$ 上で広義積分可能という。また、上の式は**広義積分の意味で成り立つ**という。

一般に関数 $f(x)$ を区間 $[a,b]$ で考えた時、 $a < c < b$ となる c に対し、$[a, c-\varepsilon]$, $[c+\varepsilon, b]$ 上では常に積分可能で、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx, \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

がともに存在するとき、f は $[a,b]$ 上広義積分可能といい、

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx \right)$$

とかく事にする。

例 4.1

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{c \to 0} \int_c^1 x^{-1/2}\,dx \\ &= \lim_{c \to 0} 2x^{1/2} \Big|_c^1 \quad (\text{こう書くことにする}) \\ &= 2x^{1/2} \Big|_0^1 = 2 \end{aligned}$$

と計算する事ができる。途中を省略して、極限の表示をしなくても結果が有限な値になっていれば良いことになる。

例 4.2 実際の積分の値が分からなくても、広義積分が存在する事が分かる事がある。例えばベータ関数

$$\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

は $s,t>0$ のとき広義積分は存在することが言える。これを見るには 0 の近くと 1 の近くに分けて考えれば良い。数列の収束に関して、次の定理を使う

定理 4.2 1. 数列 $\{a_n\}$ が単調増加で、上に有界ならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ がある。また $\{a_n\}$ が単調減少で、下にに有界ならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ がある。つまり、

- $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \leq \ldots$ かつ, ある実数 M に対して $a_n \leq M$ がすべての n で成り立つならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ 　がある。
- $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$ かつ, ある実数 K に対して $a_n \geq K$ がすべての n で成り立つならば $\lim_{n\to\infty} a_n$ 　がある。

2. $\{a_t; t \in T\}$ が 実数をパラメータとする数列とするとき、$t_n \to t_0$ となる任意の点列 $\{t_n\}$ に対して $\lim_{n\to\infty} a_{t_n}$ が同じ極限 A に収束するならば

$$\lim_{t\to t_0} a_t = A$$

が成り立つ。

たとえば、$\displaystyle\int_\varepsilon^{1/2} x^{s-1}(1-x)^{s-1}\,dx$ は被積分関数が非負だから ε が 0 に近いほど大きくなるので、定理から $\varepsilon \to 0$ のとき極限があるかどうかは、この積分が上に有界であることを確かめればよい。これは $t \geq 1$ のときと $0<t<1$ のときに分けて考えないといけないが、次のように確かめることができる。

- $t \geq 1$ のとき、$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ならば $(1-x)^{t-1} \leq 1$ だから

$$\int_\varepsilon^{1/2} x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx \leq \int_\varepsilon^{1/2} x^{s-1}\,dx = \frac{1}{s}x^s\Big|_\varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{s}2^{-s}$$

右辺は ε によらない定数なので、有界性が言えた。

- $0<t<1$ のとき、$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ ならば $(1-x)^{t-1} \leq 2^{1-t}$ だから

$$\int_\varepsilon^{1/2} x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx \leq \int_\varepsilon^{1/2} x^{s-1}2^{1-t}\,dx = \frac{2^{1-t}}{s}x^s\Big|_\varepsilon^{1/2} \leq \frac{1}{s}2^{1-t-s}$$

これも右辺は ε によらない定数なので、有界性が言えた。

$\displaystyle\int_{1/2}^{1-\varepsilon} x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$ についても同様にこの広義積分が収束することが言える。

練習 4.1 次の積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 　(2) $\displaystyle\int_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$ 　(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

(4) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$