7 重積分

いよいよ多変数関数の積分（重積分）を勉強する。まずは 2 変数関数の積分から始めよう。

7.1 長方形上の重積分

R を長方形 $[a,b]\times[c,d] := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$ とする。R 上で定義された関数 $f=f(x,y)$ の定積分

$$\int_R f(x,y)\,dxdy$$

を以下の手順で定義する。

1° 区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割を

$$\Delta_1 = \{a=s_0<s_1<\ldots<s_m=b\}$$
$$\Delta_2 = \{c=t_0<t_1<\ldots<t_n=d\}$$

をとり、

$$\Delta=\Delta_1\times\Delta_2=\{C_{i,j}=[s_{i-1},s_i]\times[t_{j-1},t_j] : 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$$

を R の分割とする。分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を $\max\{|\Delta_1|,|\Delta_2|\}$ と定める。

2° 上方和 $\overline{S}_\Delta$ と下方和 $\underline{S}_\Delta$ を、

$$\overline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}M_{i,j}|s_i-s_{i-1}||t_j-t_{j-1}|$$
$$\underline{S}_\Delta=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}m_{i,j}|s_i-s_{i-1}||t_j-t_{j-1}|$$

とする。ただし、

$$M_{i,j}=\max\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in C_{i,j}\}$$
$$m_{i,j}=\min\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in C_{i,j}\}$$

とする。

3° 一変数の時と同じようにして

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\overline{S}_\Delta=\lim_{|\Delta|\to 0}\underline{S}_\Delta$$

となるときに f は R 上積分可能といい、この極限の値を

$$\int_R f(x,y)\,dxdy$$

とかく。

4° f が R で連続の時積分可能となる。

7.2 一般の集合上の重積分

E を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする。$f=f(x,y)$ が E 上で定義された関数の時、$E\subset R$ となる長方形 R に対して f を R 上に拡張した関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in E\\ 0 & (x,y)\notin E\end{cases}$$

とおく。このとき、$\tilde{f}$ の R 上の積分により f の E 上の積分とする。つまり、

$$\int_E f(x,y)\,dxdy=\int_R f(x,y)\,dxdy$$

あきらかに、この値は長方形 $R\supset E$ の取り方によらない。（ただ、どのような E の上で連続関数が積分可能になるかはうるさく言い出すと難しい。ここでは簡単な集合上の積分を念頭におく）特に、1_E で E 上 1 の値を取り、E^c 上で 0 を取る関数を考えると、

$$\int_E 1_E(x,y)\,dxdy$$

は E の面積を表す。上の注意からこれは

$$\int 1_E(x,y)\,dxdy$$

と書いて構わない。1_E が積分可能なとき、E は**面積確定**という。

7.3 累次積分

長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の関数 $f(x,y)$ の積分はまずどちらかをとめて片方の変数について積分し、その結果を残りの変数について積分する。これを累次積分という。

例 7.1 $\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\,dxdy$ は次のように計算する。

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d xydy\right) dx = \int_a^b x\frac{d^2-c^2}{2}\,dx = \frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}$$

y から先に積分したが、x から先に積分しても結果は変わらない。このことは後で詳しく調べる事にする。

縦線形の領域上の積分　平面の部分集合 D が次のように表されている時、縦線形の領域という。

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

ただし、$\varphi(x)$, $\psi(x)$ は連続で、$\varphi(x)\le\psi(x)$ が $a\le x\le b$ で成り立っているものとする。(x と y の役割が入れ替わっていても良い)

このとき、$f(x,y)$ が D で積分可能ならば

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

と逐次積分をすれば良い。これも後で詳しく述べる。

例 7.2 $f(x,y)=x^2y^2$ を円板 $\{x^2+y^2\le 1\}$ 上で積分する。

$$D = \{(x,y);\ -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$$

と書けるので、

$$\begin{aligned}\int_D x^2y^2\,dxdy &= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dy\right] dx\\ &= \int_{-1}^1 x^2\left[\frac{y^3}{3}\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right] dx\\ &= \int_{-1}^1 2x^2\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\,dx\\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^4 x\,dx\\ &= \frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 x\,dx\right)\end{aligned}$$

$I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\,dx = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\frac{\pi}{2}$ なので、求める積分の値は

$$\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2^3} - \frac{5\cdot 3}{2^3 3!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}$$

となる。

注意 7.1 上の例で x または y の指数が奇数ならば対称性に気をつけると定積分の値は 0 である事が分かる。

練習 7.1 次の累次積分を計算せよ。

$$(1)\ \int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\right)dx \quad (2)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\sin(x+y)\,dy\right)dx$$