2.3　大数の強法則

大数の弱法則の主張は**相対的な頻度は真の確率に近づいていく**という直観的な主張に比べると間接的であり，もどかしい感じがする．もっと直接にこの主張を数学的に証明することはできないかというのがこの節の目的である．

定義 2.8 平均 0 の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して**大数の強法則**が成り立つとは，

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad a.e.$$

が成り立つことを言う．X_n の平均が 0 でないときは $\tilde{X}_n = X_n - E(X_n)$ に対して大数の強法則が成り立つときに言う．特に，$EX_n = m$ （一定）のときはこれは

$$\frac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \quad a.e. \tag{2.17}$$

と同値である．

定理 2.7 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立，同分布な確率変数列で，

$$EX_1 = m,\ \mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2 < \infty,\ EX_1^4 < \infty$$

を満たすとすると，この $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して大数の強法則 (2.17) が成立する．

証明　まず，$E\{(X_n - m)^4\} \le K$ となる定数がある．これは $(a+b)^4 \le 8(a^4 + b^4)$ であるから，仮定から

$$E\{(X_n - m)^4\} \le 8\{EX_n^4 + m^4\} < \infty$$

となり，右辺の値を K とおくとよい．チェビシェフの不等式から[7]

$$P(|\frac{S_n}{n} - m| \ge n^{-1/8}) \le \sqrt{n}E\{|\frac{S_n}{n} - m|^4\} \tag{2.18}$$

ここで，独立性から

$$\begin{aligned} E\{|\frac{S_n}{n} - m|^4\} &= n^{-4}E\{(\sum_{j=1}^{n}(X_j - m))^4\} \\ &= n^{-4}[\sum_{j=1}^{n} E\{|X_j - m|^4\} + 6\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j+1}^{n}(\sigma^2)^2] \\ &\le n^{-3}K + 3n^{-3}(n-1)\sigma^4 \\ &\le (K + 3\sigma^4)n^{-2} \end{aligned}$$

これを (2.18) に代入して，

$$P(|\frac{S_n}{n} - m| \ge n^{-1/8}) \le (K + 3\sigma^4)n^{-3/2}$$

したがって n についてこの式の和を取ると，

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_n}{n} - m| \ge n^{-1/8}) &\le (K + 3\sigma^4)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3/2} \\ &\le (K + 3\sigma^4)[1 + \int_1^{\infty} x^{-3/2}dx] < \infty \end{aligned}$$

[7] $f(x) = x^4\ (x \ge 0);\ = 0\ (x \le 0)$ に対して $X = |\frac{S_n}{n} - m|$ とおく．このとき，やはり，$f(X) = |\frac{S_n}{n} - m|^4$

が分かる．ボレル-カンテリの第 1 補題 (Theorem 2.6(i)) から，確率 1 である番号 N が存在して $n \ge N$ のとき，

$$|\frac{S_n}{n} - m| < n^{-1/8} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が成り立つ．よって大数の強法則が成り立っている．

Theorem 2.7 は，一番簡単な形の証明を持つ大数の強法則である．これよりももっと緩やかな条件で大数の強法則は成り立つことが知られている．定理の形で述べておこう．証明は西尾真喜子「確率論」参照のこと．

定理 2.8 (i)　$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立な確率変数で，平均 0, 分散 $\sigma_n^2 < \infty$ とし，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \tag{2.19}$$

となるならば，$\{X_n\}$ に対して大数の強法則が成立する．

(ii)　$\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で同分布を持ち，可積分，$EX_1 = m$ とすると $\{X_n\}$ に対して大数の強法則 (2.18) が成立する．

注意 2.9 (i) の証明にはコルモゴロフ [Kolmogorov] の不等式と呼ばれる有名な不等式と次の事実（クロネッカー [Kronecker] の補題の特別な場合）を使う．非負の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} < \infty \quad \text{ならば} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} \to 0$$

(ii) の証明には (i) の結果を $Y_n = X_n \cdot 1_{[|X_n| \le n]}$ に対して使っておき，

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \ne Y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \le n) \le Const. \times E|X_1| < \infty$$

から，ボレル-カンテリの第 1 補題を用いて X_n に対しても大数の強法則が成り立つことを示す．

例 2.3 $\{X_n\}$ が独立同分布で、X_1 の分布がパラメータ λ のポアソン分布であるとき、

$$
\begin{aligned}
EX_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum n = 1^{\infty}\lambda\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda} = \lambda \\
EX^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda < \infty, \\
EX^4 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^4\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n^3\frac{\lambda^n}{(n-1)!}e^{-\lambda} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (m+1)^3\frac{\lambda^{m+1}}{m!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda\sum_{m=0}^{\infty} (m^3+3m^2+3m+1)\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda} \\
&= \lambda\sum_{m=1}^{\infty} (m^2+3m+3)\frac{\lambda^m}{(m-1)!}e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda\sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)^2+3k+6)\lambda^{k+1}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2\sum_{k=0}^{\infty} (k^2+5k+7)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \lambda \\
&= \lambda^2(\lambda^2+\lambda+5\lambda+7) + \lambda \\
&= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda
\end{aligned}
$$

より、定理 *2.7* の条件が成り立っているので、大数の強法則が成り立ち、

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \to \lambda \quad a.s.$$

が分かる。もちろん、*(2.19)* も成り立つので、こちらを使って大数の強法則が成り立つという方が簡単である。

(2.19) をつかって、$\{X_n\}$ が独立なポアソン分布だがパラメータが λ_n に従うものとすると、$V(X_n) = \lambda_n$ だから定理 2.8 により、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{n^2}$$

が収束するならば大数の強法則は成り立ち、従って、$\lambda_n = n^{(}1-a) \quad (1 > a > 0)$ の時でも大数の強法則は成り立っている。ただし、この時は

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - (\lambda_1 + \ldots + \lambda_n)}{n} = 0 \qquad a.s.$$

という主張になる。

$$\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}{n} = \frac{n^{1-a}}{2-a}(1 + o(1))$$

だから、サンプル平均はどんどん大きくなっている。最後に近い項の影響が大きい事になる。

練習問題 2.6 Theorem 2.7 は別の証明法がある．以下の手順でこれを証明してみよ．

(i) Z が可積分な確率変数ならば，確率 1 で $|Z| < \infty$ となることを証明せよ．(逆は正しくないことに注意！)

(ii) Theorem 2.7 の条件の下で，

$$\sum_{n=1}^{\infty} E\big(\frac{(S_n - nm)^4}{n^4}\big) < \infty$$

を示し，これから大数の強法則；
$\dfrac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \quad$ a.e. を示せ．

練習問題 2.7 毎回 1 枚づつ宝くじを買う時、ずっと買い続けた時の損得を調べよ。(実際の宝くじについて調べて検討せよ。)