1.5　これまでの復習

1.5.1　写像の逆像

ここでは簡単のため、確率空間を $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $P = Lebesgue$ 測度として考える。確率変数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ に対して、その逆像 X^{-1} は $\mathbb{R}$ の任意の部分集合 B に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \in B\}$$

によって定義される。いくつか例を考える。

例 1.8 $\omega \in [0,1]$ に対して

$$X(\omega) = \omega$$

とおく。このとき、$B \subset [0,1]$ に対して

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in [0,1]\,;\, X(\omega) \in B\}$$

だが、$X(\omega) = \omega$ なので、

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in [0,1]\,;\, \omega \in B\} = B$$

一般に、 $A \subset \mathbb{R}$ に対しては

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in [0,1]\,;\, \omega \in A\} = A \cap [0,1]$$

となる。

例 1.9 $X(\omega) = \sin(\pi\omega - \frac{\pi}{2})$ とおくと、 $X(\omega) \in [-1,1]$ で、この写像は 1 対 1 の写像になっている。つまり、任意の $t \in [-1,1]$ に対して

$$X^{-1}(\{t\}) = \{\omega \in [0,1]\,;\, \sin(\pi(\omega - \frac{1}{2})) = t\} = \{\frac{\sin^{-1} t}{\pi} + \frac{1}{2}\}$$

となる。 $-1 \le a < b \le 1$ のとき、

$$X^{-1}([a,b]) = [\frac{\sin^{-1} a}{\pi} + \frac{1}{2}, \frac{\sin^{-1} b}{\pi} + \frac{1}{2}]$$

である。なぜなら、$\omega \in [0,1]$ のとき、$X(\omega) = \sin(\pi\omega - \frac{\pi}{2})$ は単調に増加しており、連続なので、 $X^{-1}(a)$ と $X^{-1}(b)$ の間のどのような ω をとっても $a \le X(\omega) \le b$ が成り立っている。

練習問題 1.8 $n \ge 2$ を自然数として $X : [0,1] \to \mathbb{R}$ を $X(\omega) = \sin(n\pi\omega)$ とおくとき、$X^{-1}([\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}])$ を求めよ。

練習問題 1.9 $\omega \in [0,1]$ に対して

$$X(\omega) = 1 + \lfloor 6\omega \rfloor$$

とおく。このとき、$X^{-1}([0, 2.5])$ を求めよ。ただし、実数 u に対して $\lfloor u \rfloor$ は u を越えない最大の整数とする。

例 1.10 確率変数 $X_n(\omega)$ を $\omega \in [0,1]$ を 2 進法展開した時の小数点以下第 n 桁の数字 (0 か 1 の値を取る) とする。このとき、

$$\begin{aligned}
X_1^{-1}(\{1\}) &= [\frac{1}{2}, 1) \\
X_1^{-1}(\{0\}) &= [0, \frac{1}{2}) \cup \{1\} \\
X_2^{-1}(\{1\}) &= [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}) \cup [\frac{3}{4}, 1) \\
X_2^{-1}(\{0\}) &= [0, \frac{1}{4}) \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) \cup \{1\}
\end{aligned}$$

となっている。

練習問題 1.10 上の例 1.10 で、

(1) $X_3^{-1}(1)$ を求めよ。

(2) $X_n^{-1}(1)$ を求めよ。

(3) $Y(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) + X_3(\omega)$ とおく。このとき、$Y^{-1}(\{1\})$ を求めよ。

1.5.2　チェビシェフの不等式

チェビシェフ (Chebyshev) の不等式をもう一度書いておこう。

定理　$f(x)$ が非負単調非減少なとき，確率変数 X について $f(X)$ が可積分ならば,

$$P(X \ge \lambda) \le \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)}$$

が任意の $f(\lambda) > 0$ となる λ に対して成立する.

これを少し使いやすくして、

定理 I を区間として、$f(x)$ が I 上で非負単調非減少で、確率変数 X が I に確率 1 で値を取る時、任意の $\lambda \in I$ に対して

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)}$$

が成り立つ。

証明はもとのチェビシェフの不等式と同じにできる。

$$\begin{aligned} Ef(X) &= E(f(X)\,;\, X \in I) \\ &\geq E(f(X); X \geq \lambda, X \in I) \\ &\leq f(\lambda)P(X \geq \lambda, X \in I) \\ &= f(\lambda)P(X \geq \lambda) \end{aligned}$$

とすればよい。

チェビシェフの不等式の応用として典型的な例をいくつかあげよう。

例 1.11 X が 2 項分布 $B(n,p)$ に従う時、$EX = np$ だが、

$$P(X \geq 2np) \leq \frac{EX}{2np} = \frac{np}{2np} = \frac{1}{2}$$

最初の不等式がチェビシェフの不等式。これは $f(x) = x$ を使った。

$x \geq 0$ で $f(x) = x^2$ は単調増加だから、これを使うと、

$$Y(\omega) = |X(\omega) - np|$$

は非負の値しか取らないので、

$$P(Y \geq np) \leq \frac{EY^2}{n^2p^2} = \frac{V(X)}{n^2p^2} = \frac{1-p}{pn}$$

$X \geq 2np$ ならば $Y \geq np$ だから

$$P(X \geq 2np) \leq P(Y \geq np) \leq \frac{1-p}{pn}$$

と、評価が大分良くなっている。

$f(x) = e^{tx}$ も $t > 0$ のとき単調増加で非負なので、X が $B(n,p)$ に従う時、

$$P(X \geq 2np) \leq \frac{E(e^{tX})}{e^{2npt}}$$

ここで、

$$E(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (1-p+pe^t)^n$$

なので、$t = 1$ をとってみると

$$P(X \geq 2np) \leq \exp\{n(\log(1+p(e-1)) - 2p)\} \leq \exp\{np(e-3)\}$$

（最後の式は $\log(1+x) \leq x$ を使った。）

右辺は $n \to \infty$ のとき、指数的に速く 0 に収束する。

練習問題 1.11 X が成功の確率 p の負の二項分布 $NB(n,p)$ に従う時、つまり $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して $P(X = k) = \binom{n+k-1}{k}(1-p)^k p^n$ のとき、期待値は $n(1-p)/p$, 分散は $n(1-p)/p^2$ である。これを使ってチェビシェフの不等式により、

$$P(X \geq 2n(1-p)/p) \leq \frac{1}{n(1-p)}$$

を確かめよ。