1　2×2 行列

まず高等学校で習った 2×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

について復習してみよう．行列達には **定数倍**，**和**，**積**という演算が定義されていた．

定数倍：実数 t （$t \in \mathbb{R}$ と表記する）に対して行列 A の t 倍 tA を

$$tA = t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$$

と定義する．これはベクトルの実数倍と同様にそれぞれの行列の成分を t 倍している．

和: 二つの 2×2 行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

に対して，和 $A + B$ を

$$A + B := \begin{pmatrix} a+\alpha & b+\beta \\ c+\gamma & d+\delta \end{pmatrix}$$

と定義する．和の定義もベクトルの定義と同様に成分ごとの和なので，わかりやすい．

積: 2×2 行列 A, B を上と同じに与えるとき，

$$AB = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix}$$

と定義する．積の定義は行列を習うまで見たことの無いものである．

1.1 行列とベクトルの積

たてベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して，行列 A を左からかけることができ，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ としたとき，積 $A\boldsymbol{x}$ は行列の積と同様に計算して

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$$

という新しいベクトルに写る． a, b, c, d がすべて 0 ならば右辺は 0 ベクトルになり，$\boldsymbol{x}$ によらないが，一般には右辺は $\boldsymbol{x}$ が変わるとそれに応じて変化する．いま，$a \neq 0$ としてよく，このとき $ad - bc = 0$ を仮定してみる．すると $a \neq 0$ だから $d = bc/a$ となる．このとき

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+bcy/a \end{pmatrix} = (ax+by) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{pmatrix}$$

となり，$\boldsymbol{x}$ が平面のすべての点を動いても， $A\boldsymbol{x}$ は $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{c}{a} \end{pmatrix}$ というベクトルと平行である．他の方向はとれない．

$ad - bc \neq 0$ のときは連立方程式

$$\begin{cases} ax+by &= u \\ cx+dy &= v \end{cases}$$

はどのような u, v に対しても解

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

を持つ．つまり，$\boldsymbol{x}$ が平面全体を動けば $A\boldsymbol{x}$ も平面全体を動く．

1.2 直線の行列による像

$\boldsymbol{x}$ が直線 $mx + ny = l$ の上を動いているとすると，$A\boldsymbol{x}$ はどのような集合を動くだろうか? $A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ とすると，$ad - bc \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} du-bv \\ -cu+av \end{pmatrix}$$

だから，これを $mx+ny=l$ に代入して

$$m(du-bv)+n(-cu+av)=l(ad-bc) \qquad \therefore (md-cn)u+(-bm+an)v=l(ad-bc)$$

これは再び直線を表している．

直線は行列により直線に写される

1.3　行列の積再考

2×2 行列 A, B を

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

と置く．この様な表記の方法は以後の行列の計算に便利である．ベクトル $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を B で $\boldsymbol{y}=B\boldsymbol{x}$ に写すと，

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_{11}x+b_{12}y \\ b_{21}x+b_{22}y \end{pmatrix}$$

となり，これをさらに A で写すと，$\boldsymbol{z}=A\boldsymbol{y}=A(B\boldsymbol{x})$ は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}x+b_{12}y \\ b_{21}x+b_{22}y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}x+b_{12}y)+a_{12}(b_{21}x+b_{22}y) \\ a_{21}(b_{11}x+b_{12}y)+a_{22}(b_{21}x+b_{22}y) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})x+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})y \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})x+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{z}=(AB)\boldsymbol{x}$ となり，行列の積は対応する平面の写像を合成する事に対応している．

1.4 横ベクトルと行列の積

(u, v) というベクトルと行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の積も次のように定義できる.

$$(u, v) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = (ua_{11} + va_{21}, ua_{12} + va_{22}).$$

これらの計算の仕方には共通の規則がある．この共通の規則が次回勉強する一般の行列の積を定義する.

練習 1.1 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ によって次の集合はどのような集合に写るか? ただし，平面の点は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表し，これが $A\boldsymbol{x}$ に写されるものとする.

(1) x 軸, (2) y 軸 (3) $y = x$ (4) 正方形 $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$